作用の変数分離解と運動方程式の積分形

tomocci

平成18 年3 月13 日

概 要

Landau, Lifshitz の “場の古典論”[1] §101 に現れる, 作用の変数分離解を用いて運動を記述する方法. “力学”[2] の §47, 48 で詳しく解説されているのだが, 最近は教科書の解説書が出版されるような時代である. 私もそれに便乗して書くことにした.

1 作用と保存量

自由度 s の系 $(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)$ 及びその Hamiltonian $H(q,p,t)$ における作用 $S = \int pdq - \int Hdt$ から得られる関係

$$p = \frac{\partial S(q,t)}{\partial q} \ , \quad -H(q,p,t) = \frac{\partial S(q,t)}{\partial t}$$

を用いて作られる, 作用 S を求める方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \qquad (1)$$

を Hamilton-Jacobi 方程式と呼ぶ. この形式解には $s+1$ 個の積分定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ と A が現れる. (自明な系では s 個の運動量と 1 個のエネルギーが得られる.) これを作用 S が

$$S(q,t;\alpha,A) = f(q,\alpha,t) + A \qquad (2)$$

のようになるように選ぶ. この節では形式解 S が $\partial S/\partial \alpha_i = \mathrm{const.}$ を満たすことを証明する.

母関数を $f(q,\alpha,t)$ とするような正準変換 $(q_i, p_i) \ \rightarrow \ (q'_i, \alpha_i)$ を考えよう.

$$\begin{aligned} S &= \int (p_i dq_i - H(q,p,t)dt) \\ &= \int (\alpha_i dq'_i - H'(q',\alpha,t)dt) + \int d(f(q,\alpha,t) - \alpha_i q'_i) \\ &= \int \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i - \left(H' - \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - q'_i\right) d\alpha_i \right\} \end{aligned}$$

の各係数を比較して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -H + H' &(3)\\
\frac{\partial f}{\partial q_i} &= p_i \\
\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} &= q'_i &(4)
\end{aligned}
$$

を得る．ところが (1), (2) から

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = H$$

なので, (3) から恒等的に $H' = 0$ が成り立つ．従って新座標における Hamilton 方程式

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0 \ , \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial H'}{\partial q'_i} = 0$$

及び (2), (4) より

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = q'_i = \text{const.} \tag{5}$$

を得る．

2　作用の変数分離解

前節の結論 (5) から作用の解を求め, 運動方程式の積分形を導く. 自由度 s の系において, エネルギー E 及び正準運動量 $p_2, \cdots, p_s$ が保存量であるとき, 上の結論を利用して残りの 1 自由度 (q_1, p_1) を解くことが出来る.

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i = \text{const.} \quad (i = 2, \cdots s + 1)$$

ここで $q_{s+1} = t,\ p_{s+1} = -E$ と置いた. よって

$$S = \sum_{i=2}^{s+1} p_i q_i + \int dq_1 \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \tag{6}$$

のように変数分離型で書き表すことが出来る. Hamilton-Jacobi 方程式

$$p_{s+1} + H\left(q_1, \cdots, q_s, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, p_2, \cdots, p_s\right) = 0$$

を逆に解いた

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_1} = P_1(q_1, p_2, \cdots, p_{s+1})$$

を (6) に代入すると

$$S = \sum_{i=2}^{s+1} p_i q_i + \int dq_1\ P_1(q_1, p_2, \cdots, p_{s+1})$$

(5) より

$$\text{const.} = q_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \int dq_1\ P_1(q_s, p_2, \cdots, p_{s+1}) \quad (i = 2, \cdots, s + 1)$$

を得る. 従って

$$\int dq_i = -\frac{\partial}{\partial p_i} \int dq_1\ P_1(q_s, p_2, \cdots, p_{s+1}) \quad (i = 2, \cdots, s + 1)$$

のように, 物体の運動を積分形で表現する事が出来る.

参考文献

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. **場の古典論**.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. **力学**.