速度の変換

平成20 年4 月27 日

今, 物体 P が点 A から点 B へ運動をしたとしよう. K 系において, 点 A の座標を

$$(x,\ t)$$

とする. 物体 P が時間 Δt の間に Δx だけ動いたとすれば, 点 B の座標は

$$(x+\Delta x,\ t+\Delta t)$$

と書ける. つまり K 系における物体 P の速度 v は

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

である.

同様に, K_0 系において考えよう. 点 A の座標は

$$(x_0,\ t_0)$$

とする. 物体 P が時間 Δt_0 の間に Δx_0 だけ動いたとすれば, 点 B の座標は

$$(x_0+\Delta x_0,\ t_0+\Delta t_0)$$

と書ける. つまり K_0 系における物体 P の速度 v_0 は

$$v_0=\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$$

である. 座標系 K, K_0 それぞれにおけるこれらの量は, 今の段階では互いに無関係だが, A, B 各点においてそれぞれ Lorentz 変換によって結びつけれられる.

点 A における Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0+Vt_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t_0+\frac{V}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{1}$$

点 B は

$$
\begin{aligned}
x+\Delta x &= \frac{(x_0+\Delta x_0)+V(t_0+\Delta t_0)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
t+\Delta t &= \frac{(t_0+\Delta t_0)+\frac{V}{c^2}(x_0+\Delta x_0)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

なので, (2) から (1) を引けば, 位置の変化量及び時間の Lorentz 変換

$$
\Delta x = \frac{\Delta x_0+V\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (3)
$$

$$
\Delta t = \frac{\Delta t_0+\frac{V}{c^2}\Delta x_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad (4)
$$

を得る. (3) を (4) で割って

$$
\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x_0+V\Delta t_0}{\Delta t_0+\frac{V}{c^2}\Delta x_0}=\frac{\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}+V}{1+\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}}
$$

ここで K 系, K_0 系それぞれにおける物体 P の速度 v, v_0 を用いれば, 速度の座標変換

$$
v=\frac{v_0+V}{1+\frac{Vv_0}{c^2}}
$$

を得る.

ここで, 後で使う式を挙げておこう.

$$
1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{(1-v_0^2/c^2)(1-V^2/c^2)}{(1+Vv_0/c^2)^2}
$$

特に $V=v_0$ のとき

$$
1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{(1-v_0^2/c^2)^2}{(1+v_0^2/c^2)^2}
$$

座標系間の運動と垂直な方向においては (3) にある位置の変化量とは異なり

$$
\Delta y=\Delta y_0
$$

である. 従ってこれを (4) で割れば

$$
v_y=\frac{v_{y0}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv_{x0}}{c^2}}
$$

となる. 便宜上 x 方向, y 方向と添字を付けた.

因みに加速度の座標変換は

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{Vv_{x0}}{c^2}\right)^3} a_{x0} \\
a_y &= \frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1+\frac{Vv_{x0}}{c^2}\right)^3} \left(a_{y0} - \frac{Va_{x0}}{c^2} v_{y0}\right)
\end{aligned}
$$