エネルギーの導出

tomocci

平成 21 年 5 月 6 日

1　保存量としてのエネルギー

運動方程式 $d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$ が成り立つと仮定すると, 外力が保存力 $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ であるとき, 運動方程式に速度を掛けて

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{v} &= -\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \nabla U \\ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{p} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= -\frac{d}{dt} U \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{p} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= -\frac{m}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv^2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + U \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U \right) &= 0 \end{aligned}$$

を得る. こうして得られる保存量をエネルギーと呼ぶのであるが, エネルギーはそもそも定数分の自由度がある. そこで運動エネルギー K として, Newton 力学の時と同じように $\boldsymbol{v} = 0$ のとき $K = 0$ としよう. こうして, 運動エネルギー

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

が得られた.

2　物体のエネルギー

質量 $m_1,\ m_2$ の 2 体が, それぞれ速度 $v_1,\ v_2$ で運動している系を考える. これを 1 体と考えれば, 質量 M の物体が速度 V で運動していることになる. このときの運動エネルギーを調べよう.

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= \left(\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - m_1 c^2 \right) + \left(\frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - m_2 c^2 \right) \\ &= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - m_1 c^2 - m_2 c^2 \\ &= K + Mc^2 - m_1 c^2 - m_2 c^2 \end{aligned}$$

さて, これは本来ならば, 運動エネルギーの出入りは全くないので

$$K_1 + K_2 = K$$

となるべきである. 個々の物体の集まりとして考えても, 全体で 1 つの物体として考えても同様の結果を与えなければならない. これは K に mc^2 だけ加えたエネルギー $E = K + mc^2$ を導入することによって

$$E_1 + E_2 = E$$

となり, 整合的になる. こうして物体のエネルギー E

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

を得る. この表式によるエネルギーの合成は, 質量の合成と c^2 の違いでしかなく, 同じものを与えていることが分かるであろう.

上では運動エネルギーしか扱っていないが, 物体の静止エネルギー mc^2 というものが, それを構成する物体の静止エネルギーと運動エネルギー, そして構成する物体間に働く結合エネルギーの総和に等しいことが容易に分かるであろう. 最早単にエネルギーのゼロ点をずらしただけではなく, 意味を持った量なのである.