Lorentz変換の導出

tomocci

平成19 年8 月6 日

1　Lorentz 変換

K 系における座標を $x,\ t$, K_0 系における座標を $x_0,\ t_0$ と表す.
前項より, K_0 系における同時刻線 $t_0 = 0$ 上の点 $(x_0,\ 0)$ は, K 系において直線

$$t = \frac{V}{c^2}x$$

上にあることが分かった. 具体的に座標値を求めよう. $t = 0$ のとき $x = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, x_0$ であった位置から, 速度 V で時間 $\frac{V}{c^2}x$ の間だけ移動したことから

$$x = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, x_0 + V \times \frac{V}{c^2}x$$

これを x について解くと

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

となるので, K_0 系における座標 $(x_0,\ 0)$ は

$$(x,\ t) = (x,\ \frac{V}{c^2}x) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ \ \frac{\frac{V}{c^2}x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)$$

となる.
また, K_0 系における固定された点 $x_0 = 0$ の座標 $(0,\ t_0)$ は K 系では

$$(x,\ t) = (Vt,\ t) = \left(\frac{Vt_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ \ \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)$$

以上を合わせれば, K_0 系の座標 $(x_0,\ t_0)$ は

$$(x,\ t) = \left(\frac{x_0 + Vt_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ \ \frac{t_0 + \frac{V}{c^2}x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)$$

こうして Lorentz 変換

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{x_0 + V t_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\
t &= \frac{t_0 + \frac{V}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

を得る.