

長さの縮み

平成19年7月5日

光時計をロケットの進行方向に沿って設置し、光線をロケットの先端と後端を往復させ、ロケットの長さを測るとする。

まずロケットに固定された K_0 系において、ロケットの長さ L_0 は往復時間を t_0 とすると

$$L_0 = \frac{ct_0}{2} \quad (1)$$

となる。

これを K 系で見よう。以下の $t-x$ グラフで分かるように、光時計は運動しているために往路と復路で経過時間が異なる。

まず往路を計算しよう。 K 系におけるロケットの長さを L 、往路の経過時間を t_1 として

$$ct_1 = L + Vt_1$$

これを t_1 について解けば

$$t_1 = \frac{L}{c - V}$$

同様に復路の経過時間を t_2 とすれば

$$ct_2 = L - Vt_2$$

なので、 t_2 について解き

$$t_2 = \frac{L}{c + V}$$

こうして K 系における光線の往復時間 $t = t_1 + t_2$ は

$$t = \frac{2cL}{c^2 - V^2}$$

よってこれを L について解けば

$$L = \frac{ct}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (2)$$

(1), (2) 及び K_0 系と K 系の間における時間の遅れの関係式 $t_0 = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} t$ より

$$L = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L_0$$

を得る.

L_0 は物体が静止しているときの長さであり, $L \leq L_0$ なので, 運動物体の長さは静止時よりも縮んでいることが分かる.