Newton 重力と Schwarzshild 半径

tomocci

平成 16 年 8 月 12 日
(平成 18 年 2 月 20 日改訂)

概 要

ブラックホールで御馴染みの Schwarzshild 半径を Newton 重力からも導き出せるという話があるが、実は導かれない事を説明する.

1 Schwarzshild 半径

一般相対論による, 重力場の 4 次元時空における 3 次元球対称な外部解

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dt)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta(d\phi)^2$$

は有名である. ここで t, r, θ, ϕ はそれぞれ時刻, 動径方向, 経度方向そして緯度方向を表すパラメーターである. G は Newton の万有引力定数で, M は重力源の質量である. この

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

は Schwarzshild 半径と呼ばれ, この半径より内側からはたとえ光速でも r_g の外側へ抜け出せる事は出来ない. Schwarzshild 半径は事象の地平面の一例である.

これは Newton の重力理論では導かれないはずのものなのだが, なぜかこれを Newton 力学から導出出来るという話がある.

2 Newton 力学

どういうことかと言うと, どうも "最高速度である光速度でも脱出できない" という部分に着目し, 光速で運動する粒子の振る舞いを考えるらしい. 実際に計算してみよう.

質量 M の質点の周りを半径 r_1 だけ離れて, 質量 m のある物体が光速度 c で等速円運動している. このときの遠心力と重力の関係は

$$\frac{mc^2}{r_1} = \frac{GMm}{r_1^2}$$

となるから, 半径 r_1 は

$$r_1 = \frac{GM}{c^2} = \frac{r_g}{2}$$

と Schwarzshild 半径 r_g の $1/2$ となる. が, この r_1 は事象の地平面とは無関係である. なぜなら, この位置から動径方向に光速度 c で射出して最遠方 $r_{\max}$ まで達したときのエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{2GMm}{r_g} = -\frac{GMm}{r_{\max}}$$

となり, $r_{\max} = r_g$ まで飛ばすことができるからだ.

Shwarzshild 半径が導出されるという事は, それよりも外側に飛び出せない特別な半径が導出されなければならない. これを踏まえてより一般的な場合を考えよう.

ある位置 r_0 から光速度で動径方向に射出して r_2 に到達させる. もし事象の地平面が存在するなら, $r_2 \leqq r_0$ なる r_0 があるはずである. つまりそれよりも遠方に飛び出すことは出来ないような r_0 を見つけ出そうという事だ. エネルギー保存則の式は

$$E = \frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{r_2}$$

これより

$$r_2 = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{r_g}}$$

を得る. 束縛条件 $E < 0$ より $r_0 < r_g$ であるので, 常に $r_2 > r_0$ となる[1]. つまり**いつでも, より遠くに飛ばせる**のだ. 従って Newton 重力の範疇では, 投げ上げ速度に上限があろうとも事象の地平面は現れない.

束縛条件 $r_0 < r_g$ からも分かるとおり, r_g より内側から投げ上げる物体は重力から逃れられずに再び落下をすることは確かである. が, これは事象の地平面とは何の関係もない. 次元解析から長さの次元 GM/c^2 が出るのは当たり前の事であるし, 係数の 2 が出たところでさほど驚くことではあるまい. Schwarzshild 半径と同じ量が出たところで, それは Schwarzshild 半径ではないのである.

[1] $r_0 \geqq r_g$ のときは無限遠方 $r_2 = \infty$ まで飛ばせる.