相対論的な反発係数と力積

tomocci

平成 21 年 1 月 11 日

概 要

力積の関係式と力学的エネルギー保存則から, 反発係数の式を考察してみた. 今回はそれを特殊相対性理論の場合に適用してみた.

1 エネルギー損失

物体 1, 2 の質量, 衝突前速度及び運動量, 衝突後速度及び運動量をそれぞれ $m_1,\ m_2,\ v_1,\ v_2,\ p_1,\ p_2,\ v_1',\ v_2',\ p_1',\ p_2'$ と表記する.

簡単のため, 物体 1 が物体 2 に追いついて衝突するという状況を考える. つまりそれぞれの速度の関係は $v_1 > v_2$ であり, 衝突後の速度は $v_1' \le v_1,\ v_2' \ge v_2,\ v_1' \le v_2'$ となるような設定となっている.

物体 1 が受ける力積の大きさを $\mathcal{J}$ と置けば, 2 体は孤立系なので, 運動量の変化は

$$\begin{aligned} p_1' - p_1 &= -\mathcal{J} \\ p_2' - p_2 &= +\mathcal{J} \end{aligned} \tag{1}$$

となる. これよりエネルギーの増分 $\mathit{\Delta}E$ は

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta}E &= (E_1' + E_2') - (E_1 + E_2) \\ &= \left(\sqrt{(p_1 - \mathcal{J})^2 + m_1^2} + \sqrt{(p_2 - \mathcal{J})^2 + m_2^2}\right) \\ &\quad - \left(\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2}\right) \\ &\le 0 \end{aligned}$$

やや面倒な計算の後

$$-\left((E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2\right)\mathcal{J}^2 + 2(p_1E_2 - p_2E_1)(E_1 + E_2)\mathcal{J} \le 0$$

ここで全エネルギー及び全質量を

$$
\begin{aligned}
E &= E_1 + E_2 \\
M &= \sqrt{(E_1+E_2)^2 - (p_1+p_2)^2}
\end{aligned}
$$

と置くと,

$$
\mathcal{J} = \frac{2E}{M^2}(p_1E_2 - p_2E_1)\varepsilon\ ,\quad 0 \le \varepsilon \le 1 \tag{2}
$$

2 速度差比

粒子 1, 2 及び重心の Lorentz 因子

$$
\gamma_1 = \gamma(v_1) = \frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}\ ,\quad \gamma = E/M
$$

を導入し, 運動量などを $p_1 = E_1 v_1$ のように速度で表すと,

$$
\mathcal{J} = 2\gamma^2 \frac{E_1E_2}{E}(v_1 - v_2)\varepsilon
$$

これを運動量保存則 (1) の式に代入し, 速度の式で表すと

$$
\begin{aligned}
v_1' &= v_1 - 2\gamma^2\frac{E_2}{E}(v_1 - v_2)\varepsilon \\
v_2' &= v_2 + 2\gamma^2\frac{E_1}{E}(v_1 - v_2)\varepsilon
\end{aligned}
$$

こうして衝突前後における速度差比は,

$$
\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = 1 - 2\gamma^2\varepsilon
$$

速度差比はゼロまたは負の数なので, (2) の ε の範囲は

$$
\frac{1}{2\gamma^2} \le \varepsilon \le 1
$$

と修正される. こうして反発係数を

$$
\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = -(2\gamma^2 - 1)e\ ,\quad e = \frac{2\gamma^2\varepsilon - 1}{2\gamma^2 - 1}
$$

で表せば

$$
0 \le e \le 1
$$