反発係数と力積

tomocci

平成 17 年 9 月 21 日

概 要

高校物理にある反発係数の式はとってつけたように現れる．勿論現象論的な概念なのでそれは当然のことなのだが，これを保存則などから素朴に考えてみたい．

1 エネルギー損失

簡単のため，物体 1 が物体 2 に追いついて衝突するという状況を考える．つまりそれぞれの速度 $v_1,\ v_2$ の関係は $v_1 > v_2$ であり，衝突後の速度 $v_1',\ v_2'$ は $v_1' \leq v_1,\ v_2' \geq v_2,\ v_1' \leq v_2'$ となるような設定となっている．物体 1 が受ける力積の大きさを $\mathcal{J}$ と置けば，2 体は孤立系なので，運動量の変化は

$$\begin{aligned} m_1 v_1' - m_1 v_1 &= -\mathcal{J} \\ m_2 v_2' - m_2 v_2 &= +\mathcal{J} \end{aligned} \tag{1}$$

となる．これより運動エネルギーの増分 $\mathit{\Delta} K$ は

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} K &= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) \\ &= -\mathcal{J}\left((v_1 - v_2) - \frac{\mathcal{J}}{2\mu}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ここで μ は換算質量 $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$ である．運動エネルギーの損失の式から得られる力積に関する条件式は

$$0 \leq \frac{\mathcal{J}}{2\mu} \leq v_1 - v_2$$

となる．これは任意の正の数 $v_1 - v_2$ に対して成立するので

$$\mathcal{J} = 2\mu(v_1 - v_2)\varepsilon$$

と置くことが出来る．ε は定数とは限らない任意関数で

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \tag{2}$$

の範囲をとる．

2　速度比

以上より (1) は

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - \frac{2\mu}{m_1}(v_1 - v_2) \\ v_2' &= v_2 + \frac{2\mu}{m_2}(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

と書ける. 従って衝突前後における相対速度の比は

$$\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = 1 - 2\varepsilon$$

となり, ここからも ε に対して制限が生じる. エネルギー損失からの制限では, 追いかける側の物体が衝突後に追い抜いていく場合も含まれているため, $v_1' < v_2'$ が考慮されていない. そのため新たに

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon \tag{3}$$

が加わる. (2), (3) より ε は

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq 1$$

という制限が付く. ここで

$$e = 2\varepsilon - 1$$

と置けば,

$$0 \leq e \leq 1$$

と簡単になる. この e を用いれば, 力積, 運動エネルギーの損失及び速度比は

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mu(v_1 - v_2)(1 + e) \\ \mathit{\Delta} K &= \frac{1 - e}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 \\ \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} &= -e \end{aligned}$$

と書き換えられる.

3　終わりに

こうして得られた e だが, これは明らかに定数とは限らない. 衝突の前後で系は並進対称性が保たれていて, 従って e に並進不変性を課せば, $v_1 - v_2$ の関数であることが許される事が分かる.

また, 以上の議論は反発係数を導出したわけではなく, 単に力積の関数形を決めていっただけである事に注意しよう.