Noetherの定理とエネルギー運動量テンソル

tomocci

平成17年10月14日

概 要

Noetherの定理で現れる, 物質場の素朴なエネルギー運動量テンソルと, Einstein方程式における物質場のエネルギー運動量テンソルは定義が異なるものの同一の物理量として扱われる. 本稿は両者が定量的に等しい事をNoetherの定理の立場からスカラー場とベクトル場に対して確かめた.

1 最小作用の原理

n 次元時空 (座標値 x^μ) 及び内部自由度を持った場 $\Phi^a(x)$ を考える. 作用汎関数

$$S = \int d^n x \ \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \tag{1}$$

は場の振る舞いが少しだけ違っていても, その値を変えない. 言い換えると, 実現される場は作用汎関数の停留値を与えることになる. これが最小作用の原理である.

本稿では変分という言葉を

- 現実の振る舞いからの仮想的なずれ
- 現実の振る舞いの範囲内における, 実際の微小変化量

という2つの意味で用いよう. 場の変分と合わせて, 作用汎関数は時空の座標値 x^μ の採り方に依らないことから

$$S' = \int d^n y \ \mathcal{L}(\Phi'(y), \partial^y_\mu \Phi'(y)) \tag{2}$$

と S は少なくとも1次の微小量の範囲で一致する.

以下の議論ではLagrangianには場の高々1階微分までが含まれているとし, 2次以上の微小量は無視する.

2 Noether の定理

2.1 変分の性質

微小座標変換

$$x^\mu \to y^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

を考える. 逆 $x^\mu = y^\mu - \xi^\mu(x(y))$ より, 微分は 1 次の微小量で

$$\partial_\mu^y = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu}\partial_\nu = \partial_\mu - (\partial_\mu \xi^\nu)\partial_\nu$$

となる.

場の関数 $F(x) \equiv F(\Phi(x))$ の座標変換を伴う変分を考えよう.

$$F'(y) = F + \delta F$$

簡単のため引数が x の時で混乱の生じない場合は省略する. 両辺を微分すれば

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^y F(y) &= (\partial_\mu - (\partial_\mu \xi^\nu)\partial_\nu)(F + \delta F) \\
&= \partial_\mu F + \partial_\mu \delta F - (\partial_\mu \xi^\nu)\partial_\nu F
\end{aligned}$$

一方, $F(x)$ として $\partial_\mu F(x)$ を選んでも良いのだから

$$\partial_\mu^y F'(y) = \partial_\mu F + \delta \partial_\mu F$$

と一致するはずである. これは ∂_μ と δ が交換しない, 即ち

$$[\partial_\mu, \delta] = (\partial_\mu \xi^\nu)\partial_\nu$$

となることを意味する. そこで

$$\bar{\delta} = \delta - \xi^\nu \partial_\nu$$

を導入すれば

$$[\partial_\mu, \bar{\delta}] = 0$$

となり, 両者は可換となる.

さてこの $\bar{\delta}$ であるが,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= F'(y) - \xi^\mu \partial_\mu^y F'(y) \\
&= F + \delta F - \xi^\mu \partial_\mu F \\
&= F + \bar{\delta} F
\end{aligned}$$

のように, 同一座標値における場 (の関数) の変分として現れることが分かる.

2.2 Jacobian

次に, 体積要素 $d^n y$ を見てみよう.

$$d^n y \;=\; d^n x\ \det\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right) = d^n x\ \det(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \xi^\mu)$$

ここで実数値を成分とする任意の n 次正方行列 A に対して行列式が

$$\begin{aligned}
\det(A)\delta_{kl} &= \sum_{p_k} \tilde{A}_{kp_k} A_{lp_k} = \det(A) \sum_i (A^{-1})_{ik} A_{li} \\
\tilde{A}_{kp_k} &= \left(\prod_{i\neq k}\sum_{p_i}\right) \epsilon_{p_1\cdots p_n} \prod_{i\neq k} A_{ip_i} \\
&= \frac{\partial}{\partial A_{kp_k}} \det(A)
\end{aligned}$$

のように定義されるので (ϵ は完全反対称行列で $\epsilon_{1\cdots n} = 1$)

$$\begin{aligned}
\det(A+\delta A) &= \det(A) + \sum_{k,l} \delta A_{kl} \frac{\partial}{\partial A_{kl}} \det(A) \\
&= \det(A)\left(1 + \sum_{k,l} \delta A_{kl} (A^{-1})_{lk}\right)
\end{aligned}$$

が成り立ち

$$d^n y \;=\; d^n x\ (1 + \partial_\mu \xi^\mu)$$

となる.

2.3 Eular-Lagrange 方程式及び連続方程式

以上を用いて, 変分及び座標変換における作用汎関数の変化を調べよう. (2) は

$$\begin{aligned} S' &= \int d^n y\ \mathcal{L}'(y) \\ &= \int d^n x\ (1+\partial_\mu \xi^\mu)(\mathcal{L}'(x)+\xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x)) \\ &= \int d^n x\ (\mathcal{L}'(x)+(\partial_\mu \xi^\mu)\mathcal{L}'(x)+\xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}'(x)) \\ &= S+\int d^n x\ (\bar{\delta}\mathcal{L}+\partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L})) \end{aligned}$$

よって $\delta S = S' - S$ は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x\ \left\{\bar{\delta}\mathcal{L}+\partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L})\right\} \\ &= \int d^n x\ \left\{\bar{\delta}\Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a}+\partial_\mu \bar{\delta}\Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}+\partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L})\right\} \\ &= \int d^n x\ \left\{\partial_\mu \left(\bar{\delta}\Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}+\xi^\mu \mathcal{L}\right)+\bar{\delta}\Phi^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a}-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

$\bar{\delta}$ を元に戻して

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^n x\ \left\{\partial_\mu \left[\delta\Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}-\xi^\nu \left(\partial_\nu \Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}-\delta^\mu_\nu \mathcal{L}\right)\right]\right. \\ &\quad \left. +\bar{\delta}\Phi^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a}-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}\right)\right\} \\ &= \int d^n x\ \left\{\partial_\mu f^\mu+\bar{\delta}\Phi^a [\mathcal{L};\Phi]_a\right\} \end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$\begin{aligned} [\mathcal{L};\Phi]_a &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a}-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a} \\ f^\mu &= \delta\Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}-\xi^\nu {\Theta_\nu}^\mu \sqrt{-g} \\ {\Theta_\nu}^\mu \sqrt{-g} &= \partial_\nu \Phi^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^a}-\delta^\mu_\nu \mathcal{L} \end{aligned} \tag{4}$$

という記号を用いた.

最小作用の原理に基づけば, $\delta S = 0$ である. 一般に作用汎関数の変化量が $\delta S = \int d^n x\ (\partial_\mu X^\mu + Y)$ のように書ける時, ξ, $\delta\Phi$ を共に境界面でゼロになるように選べば $Y = 0$ となり, 場が $Y = 0$ を満たす時, 任意の ξ, $\delta\Phi$ に対して $\partial_\mu X^\mu = 0$ となる. 具体例を見ていこう.

2.3.1 Eular-Lagrange 方程式

今, $\xi = 0$ とし, 境界で $\delta\Phi = 0$ であるような任意の変分を考えると, Eular-Lagrange 方程式

$$[\mathcal{L}; \Phi]_a = 0$$

を得る. これが場 Φ^a の振る舞いを定める.

2.3.2 連続方程式

Eular-Lagrange 方程式を満たすような場に対して任意に ξ と $\delta\Phi$ をとったとき, 連続方程式

$$\partial_\mu f^\mu = 0$$

を得る.

時空が平坦で, かつ ξ が座標値に依らず任意の一定値をとるとき, 場は変換を受けず ($\delta\Phi = 0$), 連続方程式は $\xi^\nu \partial_\mu {\Theta_\nu}^\mu = 0$ を与える. ξ は任意なので

$$\partial_\mu {\Theta_\nu}^\mu = 0$$

となり, これは場のエネルギーや運動量の保存則を与えるため, ${\Theta_\nu}^\mu$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれる.

2.3.3 Einstein 方程式

重力場に関する Eular-Lagrange 方程式も, 重力場 $g^{\mu\nu}$ で変分をとることによって得ることが出来る. 重力場の Lagrangian には場の高階微分が含まれているため, これまでの議論を適用させるためにはそれを全微分項に避けておく必要があるのだが, 冗長になるために省略する.

重力場の Lagrangian (の高階微分を含まない部分) を $\mathcal{L}_G$, 物質場の Lagrangian を $\mathcal{L}_M$ と置けば, Eular-Lagrange 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

を得る. ここで

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_G; g]_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\kappa}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R)\sqrt{-g} \\
[\mathcal{L}_M; g]_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \qquad (5)
\end{aligned}$$

であり, $T_{\mu\nu}$ もまたエネルギー運動量テンソルと呼ばれる.

3　エネルギー運動量テンソル

ここで疑問に持つのは, (4) で定義される $\Theta_{\mu\nu} = g_{\nu\rho}\Theta_\mu{}^\rho$ と (5) で定義される $T_{\mu\nu}$ の関係である. 両者は共にエネルギー運動量テンソルを名乗っているが, 定量的に同じものなのであろうか. 実際に確かめてみよう.

重力場 $g^{\mu\nu}$ そして物質場としてスカラー場 ϕ とベクトル場 A_μ を考える.

微小座標変換 $x \to y = x + \xi$ によって場はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}\phi &= -\xi^\mu \partial_\mu \phi \\
\bar{\delta}A_\mu &= -(\partial_\mu \xi^\nu)A_\nu - \xi^\nu \partial_\nu A_\mu \\
\bar{\delta}g^{\mu\nu} &= 2\nabla^{(\mu}\xi^{\nu)} = 2g^{\rho(\mu}\partial_\rho \xi^{\nu)} - \xi^\nu \partial_\nu g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

と変換を受ける. ∇_μ は重力場に関する共変微分で, $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$ という性質を持つ. スカラー場とベクトル場を別々に考えるのは面倒なので,

$$\bar{\delta}A_\mu = -\epsilon(\partial_\mu \xi^\nu)A_\nu - \xi^\nu \partial_\nu A_\mu$$

のように一筆で表すことにしよう. ベクトル場を考えるときは $\epsilon = 1$ にし, スカラー場を考えるときは $\epsilon = 0,\ A_\mu \to \phi$ にすればよい.

重力場と物質場の Lagrangian をそれぞれ $\mathcal{L}_G,\ \mathcal{L}_M$ とする. ここで言う物質場とは重力場以外の場全体の事ではなく, その内の個々の場を指している. 場は Eular-Lagrange 方程式

$$[\mathcal{L}_G; g]_{\mu\nu} + [\mathcal{L}_M; g]_{\mu\nu} = 0\ ,\quad [\mathcal{L}_M; A]^\mu = 0$$

を満たし複雑に関係しあっているが, 座標変換によって重力場及び物質場の作用汎関数はそれぞれ独立に不変となる. 今興味あるのは物質場の作用汎関数 S_M の座標変換における振る舞いである. 物質場の作用汎関数の変化分は (3) から

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int d^n x\ \Bigg\{ \partial_\mu \left(\bar{\delta}A_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\alpha} + \bar{\delta}g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu g^{\alpha\beta}} + \xi^\mu \mathcal{L}_M \right) \\
&\qquad + \bar{\delta}A_\alpha [\mathcal{L}_M; A]^\alpha + \bar{\delta}g^{\alpha\beta}[\mathcal{L}_M; g]_{\alpha\beta} \Bigg\} \\
&= \int d^n x\ \Bigg\{ \partial_\mu \Bigg(-(\epsilon \partial_\alpha \xi^\nu A_\nu + \xi^\nu \partial_\nu A_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\alpha} \\
&\qquad + 2\nabla^\alpha \xi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu g^{\alpha\beta}} + \xi^\mu \mathcal{L}_M \Bigg) + 2\nabla_\mu \xi^\nu [\mathcal{L}_M; g]^\mu_\nu \Bigg\}
\end{aligned}$$

途中で物質場に対する Eular-Lagrange 方程式を用いた. ξ に対する微分が最も少なくなるように部分積分すれば

$$\begin{aligned}
\delta S_M &= \int d^n x\ \Bigg\{ \partial_\mu \Bigg(-(\epsilon \partial_\alpha \xi^\nu A_\nu + \xi^\nu \partial_\nu A_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\alpha} \\
&\qquad + 2\nabla^\alpha \xi^\beta \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu g^{\alpha\beta}} + \xi^\mu \mathcal{L}_M + 2\xi^\nu [\mathcal{L}_M; g]^\mu_\nu \Bigg) - 2\xi^\nu \nabla_\mu [\mathcal{L}_M; g]^\mu_\nu \Bigg\}
\end{aligned}$$

ξ, $\partial\xi$ についてまとめると

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int d^n x \left\{\partial_\mu\left(-\xi^\nu(\Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g}) - \epsilon\partial_\alpha\xi^\nu A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\mu A_\alpha}\right)\right.\\ &\quad \left. - \xi^\nu\nabla_\mu(T^\mu_\nu\sqrt{-g})\right\}\end{aligned}$$

ここで簡単のため物質場には重力場の微分は含まないとした. こうして

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu\left(\xi^\nu(\Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g}) + \epsilon\partial_\alpha\xi^\nu A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\mu A_\alpha}\right)\\ 0 &= \xi^\nu\nabla_\mu(T^\mu_\nu\sqrt{-g})\end{aligned}$$

に辿り着く. 2 番目の式は所謂エネルギー保存則 $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ を与える. 最初の式は更に全微分を実行して

$$\begin{aligned}0 &= \xi^\nu\partial_\mu(\Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g})\\ &\quad +\partial_\mu\xi^\nu\left(\Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g} - \epsilon\partial_\rho\left(A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\rho A_\mu}\right)\right)\\ &\quad -\epsilon\partial_\alpha\partial_\beta\xi^\nu A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_{(\alpha}A_{\beta)}}\end{aligned}$$

となるので, ξ, $\partial\xi$ そして $\partial\partial\xi$ がそれぞれ任意の微小量であることから

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu(\Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g})\\ 0 &= \Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - T^\mu_\nu\sqrt{-g} + \epsilon\partial_\rho\left(A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\rho A_\mu}\right) \qquad (6)\\ 0 &= A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_{(\alpha}A_{\beta)}} \qquad (7)\end{aligned}$$

が得られる. 平坦な時空におけるエネルギー運動量保存則には次の

$$0 = \partial_\mu(\Theta_\nu{}^\mu + \partial_\rho f_\nu{}^{[\mu\rho]})$$

のような全微分項 $\partial_\rho f_\nu{}^{[\mu\rho]}$ を許す任意性があった事を考慮すると, (7) を考慮に入れた上での (6) は $\Theta_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$ が本質的に同一の量であると主張している事がわかる.

次に, その全微分項について調べていこう. スカラー場の場合, (6) から直ぐに

$$T^\mu_\nu = \Theta_\nu{}^\mu$$

が結論付けられる. ベクトル場の場合はどうか. (7) を考慮して, (6) は

$$\begin{aligned}T^\mu_\nu\sqrt{-g} &= \Theta_\nu{}^\mu\sqrt{-g} - \partial_\rho\left(A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\mu A_\rho}\right)\\ &= (\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu)\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\partial_\mu A_\rho} - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}_M + A_\nu\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial A_\mu}\end{aligned}$$

現実的にベクトル場としてゲージポテンシャルを考えているので, 一般に Yang-Mills 場を考えれば, ゲージ変換

$$\delta A_\mu^a = -\partial_\mu \lambda^a - f^{abc} A_\mu^b \lambda^c$$

における連続方程式

$$0 = \partial_\mu \left(\delta A_\nu^a \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} \right)$$

から次の恒等式

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^c f^{abc} \left(A_\mu^b \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\mu^a} + \partial_\mu A_\nu^b \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} \right) \\ 0 &= \partial_\mu \lambda^a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\mu^a} - f^{abc} A_\nu^b \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\nu^c} \right) \\ 0 &= \partial_\mu \partial_\nu \lambda^a \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_{(\mu} A_{\nu)}^a} \end{aligned}$$

を得る. 微小座標変換だけでなくゲージ変換の対称性からも, 運動項の対称な成分は禁止される事にも注意しよう.

こうして

$$T_\nu^\mu \sqrt{-g} = (\partial_\nu A_\rho^a - \partial_\rho A_\nu^a + f^{abc} A_\nu^b A_\rho^c) \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \partial_\mu A_\rho^a} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}_M$$

を得る.

4 終わりに

この原稿を書くにあたって

内山龍雄著「物理学選書 15 一般相対性理論」(裳華房)

の第 5 章「不変変分論」を大いに参考とした. より一般的な議論, ないしは重力場における議論などに興味をもたれた方はそちらを読んで頂きたい.