# モノコードの波動方程式

tomocci

平成17年8月18日

**概 要**

先日, 中学3年生にモノコードの弦の長さと音程の関係について間違った説明をしてしまい大恥をかいてしまった. 今回は自戒を込めて, モノコードの波動方程式を導出する事にする.

## 1 始めに

中学生に理科を教えていた. 「張力が一定に張られた一本の弦がある. 次の中で最も音が大きく, かつ音が高いものはどれか」という内容の問いだった. 特に何も考えず「**私は弦が長い方が音が高い**」と答えてしまった. しかも, 輪ゴムを持ってきて実践し, 「**ほらね**」と満面の笑みで. 「じゃあ答えを見てみようか.」勿論逆の答えが載っている. 解説には「振動数の高いほうが音が高い」と一言. 唖然としたまま時が流れる.

その後, なぜ答えのようになるのか全く答えることが出来ず, 授業が終わった. 終わったのは授業だけじゃなかった. 物理が分かっていなかった自分. 物理を説明できなかった自分. この衝撃は決して忘れられるものではない. 自責の念に押し潰されそうになりながらこの原稿を書くことにする.

## 2　導出

質量 $m$, 長さ $L$ の弦を張力 $T$ で張る. この弦を $N$ 等分して離散化し, $N$ 個の微小質点各々に対して運動方程式を立て, 最後に $N \to \infty$ の極限をとることにしよう. 因みに, 特に言及せずに '$\simeq$' によって近似操作を行っている.

微小質点の質量を $m_i \equiv m/N$, 要素の間隔を $l_i \equiv L/(N-1) \simeq L/N$ と置く. $i$ 番目の微小質点の変位を $\phi_i(t) = \phi(x,t)$ と書くことにすると, $i \pm 1$ 番目と $i$ 番目の微小質点の間を結ぶ線分と, 弦の平衡状態におけるそれと成す角度 $\theta_{i\pm1}$ は

$$\begin{aligned}\tan\theta_{i\pm1} &= \frac{1}{l_i}(\phi_{i\pm1} - \phi_i) \\ &= \frac{1}{l_i}(\phi(x \pm l_i) - \phi_i) \\ &= \pm\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} + \frac{l_i}{2}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(l_i^2).\end{aligned}$$

ここで

$$\left|\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right| \ll 1 \tag{1}$$

という条件を課そう. すると

$$\sin\theta_{i\pm1} \simeq \theta_{i\pm1} \simeq \tan\theta_{i\pm1}$$

という近似が成立する. こうして $i$ 番目の微小質点に働く力 $F_i$ は

$$\begin{aligned}F_i &= T\sin\theta_{i-1} + T\sin\theta_{i+1} \\ &\simeq T(\tan\theta_{i-1} + \tan\theta_{i+1}) \\ &= Tl_i\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\end{aligned}$$

となる. 但し張力は微小質点間を結ぶ線分に平行に働き, 一定であるとした. こうして運動方程式

$$m_i\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = Tl_i\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

を得るが, 係数 $Tl_i/m_i$ は $N \to \infty$ の極限で

$$\frac{TL}{m}$$

つまり位相速度 $v$ との間に

$$v = \sqrt{\frac{TL}{m}}$$

という関係があることから, 最終的な波動方程式

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}, \quad v = \sqrt{\frac{TL}{m}} \tag{2}$$

を得る.

## 3　解

　境界条件

$$\phi(x=0,t)=\phi(x=L,t)=0$$

を満たす解

$$\phi_n(x,t)=\phi_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}vt+\delta_n\right)$$

から, 波動方程式 (2) の成立条件 (1) は

$$\left|\frac{n\pi\phi_n}{L}\right|\ll 1$$

となり, 振幅は制限される.

　さて, この解において振動数 $f_n$ 及び波長 $\lambda_n$ は

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{2\pi}\frac{n\pi}{L}v=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{T}{mL}} \\ \lambda_n &= \left(\frac{1}{2\pi}\frac{n\pi}{L}\right)^{-1}=\frac{2L}{n} \end{aligned}$$

であるので, 仮に, 張力がばねの様に伸びに比例 ($T=k\Delta L$) するのであれば

$$f_n=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{\Delta L}{L_0+\Delta L}}$$

となり, 確かに伸びが大きいほど振動数は増加する事になる.

　また, モノコードあるいはギターの弦のように, 境界を調節する事によって振動数を見るものであるならば, 質量よりも質量線密度 $\sigma=m/L$ を使う方が良いので, 振動数は

$$f_n=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

となる.

## 4　終わりに

素朴に考えれば,

$$\text{振動数} = \frac{1}{\text{波長}}$$

という関係は少なくとも素粒子論研究室に所属していたものなら体に染み付いている位に当たり前の事なのだが, それが完全に抜けていたのは屈辱以外の何ものでもない. ミクロだミクロだとやってたのは何だったのか. 量子力学だの何だのと, 一体何をやってきたのか. 本当に情けなくて仕方がない.