質量を持ったばねの波動方程式

tomocci

平成 17 年 9 月 10 日

概 要

弦の波動方程式で気を良くしたので, 今度は質量を持ったばねの波動方程式を求めてみることにした.

1 導出

質量 m, 自然長 l のばねを天井に固定し, 下端に質量 M の錘を付ける. この系の模型を立てよう. 質量のない, 自然長が $l_i = l/N$ でばね定数が $k_i = Nk$ の微小なばねを, 質量 $m_i = m/(N-1) \simeq m/N$ の微小な質点で繋いでいくことによって, 質量のあるばねを記述する事にする. 微小質点と錘に対して運動方程式を立て, $N \to \infty$ の極限をとる.

変位を $\phi_i(t) = \phi(x,t)$ とおけば, 微小質点の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\phi}_i &= -k_i(\phi_i - \phi_{i-1}) - k_i(\phi_i - \phi_{i+1}) - m_i g \\ &= k_i\{(l_i\phi_i' + \frac{l_i^2}{2}\phi_i'') + (-l_i\phi_i' + \frac{l_i^2}{2}\phi_i'')\} - m_i g + \mathcal{O}(l_i^3) \\ &= k_i l_i^2 \phi_i'' - m_i g + \mathcal{O}(l_i^4) \end{aligned}$$

こうして

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{kl^2}{m}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = -g \tag{1}$$

を得る. 一方, 錘についての運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{\phi}_N &= -k_i(\phi_N - \phi_{N-1}) - Mg \\ &= -k_i l_i \phi_N' - Mg + \mathcal{O}(l_i^2) \end{aligned}$$

となり, 下端における境界条件

$$\frac{\partial^2\phi(l,t)}{\partial t^2} + \frac{kl}{M}\frac{\partial\phi(l,t)}{\partial x} = -g \tag{2}$$

を得る. 上端に関しては

$$\phi(0,t) = 0 \tag{3}$$

である.

2　解

波動方程式 (1) は非斉次方程式なので, 簡単には解けない. そこでまず通常のばねの運動にならって, 平衡点 $\phi_r(x)$ を調べてみよう. 但し, 冗長を避けるために x の代わりに

$$\xi = \frac{x}{l}$$

を用いることにする. ϕ_r についての方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\frac{k}{m}\phi_r''(\xi) &= g \\
\frac{k}{M}\phi_r'(1) &= -g \\
\phi_r(0) &= 0
\end{aligned}$$

である. これの解は直ちに求まり

$$\phi_r(\xi) = -\frac{(M+m)g}{k}\xi + \frac{mg}{2k}\xi^2$$

この平衡点の周りでの振動を考えよう.

$$\Phi(\xi, t) \equiv \phi(\xi, t) - \phi_r(\xi)$$

とおけば, 斉次方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(\xi,t)}{\partial t^2} - \frac{k}{m}\frac{\partial^2\Phi(\xi,t)}{\partial \xi^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2\Phi(1,t)}{\partial t^2} + \frac{k}{M}\frac{\partial\Phi(1,t)}{\partial \xi} &= 0 \\
\Phi(0,t) &= 0
\end{aligned}$$

が得られる. 従って解は

$$\begin{aligned}
\phi_\theta(\xi,t) &= \phi_\theta \sin(\theta\xi)\sin\left(\theta\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta_\theta\right) + \phi_r(\xi) \quad (4) \\
\phi_r(\xi) &= -\frac{(M+m)g}{k}\xi + \frac{mg}{2k}\xi^2 \\
\theta\tan\theta &= \frac{m}{M} \quad (5)
\end{aligned}$$

となる. θ は条件式 (5) によって離散化される. $\phi_\theta\sin(\theta\xi)$ は振幅を表していて, θ が大きいところ (励起モード) では振動に節が現れる.

3 解の極限

3.1 第ゼロ近似

さて, 解 (4) はばねの質量が小さいときを再現するであろうか. これは角振動数が $\theta\sqrt{k/m} \to \sqrt{k/M}$ になる必要があることを意味する. これは条件式 (5) から, $\theta \ll 1$ において

$$\theta \simeq \sqrt{\frac{m}{M}}$$

が得られることから, 通常のばねの運動

$$\phi(\xi,t) = \xi\left(\phi\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t+\delta\right) - \frac{Mg}{k}\right)$$

を再現する.

3.2 第1近似と励起モード

$m=0$ 近傍で θ が微小量をとることは角振動数からの要請であり, 条件式 (5) にはそうでない場合も存在している. 実際 $m=0$ 近傍は $\theta = n\pi$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 近傍が対応し,

$$\begin{aligned}\theta\tan\theta &= n\pi(\theta-n\pi)+(\theta-n\pi)^2\\ &\quad +\frac{n\pi}{3}(\theta-n\pi)^3+\frac{1}{3}(\theta-n\pi)^4+\mathcal{O}(\theta^5)\end{aligned}$$

と展開して $n=0$ に関しては 4 次まで, $n\geq 1$ に関しては 2 次までとってこれを解くと,

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{m}{M}\left(1-\frac{m}{3M}\right)}\ ,\quad \theta_{n\geq 1} = n\pi+\frac{1}{n\pi}\frac{m}{M}-\frac{1}{(n\pi)^3}\frac{m^2}{M^2}$$

よって角振動数 $\omega_n = \theta_n\sqrt{k/m}$ は

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+\frac{1}{3}m}}\ ,\quad \omega_{n\geq 1} = n\pi\sqrt{\frac{k}{m}}+\frac{1}{n\pi}\sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{k}{M}}+\cdots$$

となる. 基底モードは錘の質量が $\frac{1}{3}m$ だけ増えていることに対応し, これは波動が $\phi(\xi,t) = \xi\phi(1,t)$ と近似できるとき, 運動エネルギーが

$$\frac{1}{2}M\dot{\phi}(1,t)^2+\int_0^1 d\xi\ \frac{1}{2}m\dot{\phi}(\xi,t)^2 = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\dot{\phi}(1,t)^2$$

となることと対応している. 励起モードに関しては, 確かに $m\to 0$ のときは存在していない事が分かる. 基底モードとのエネルギー比は M/m のオーダーとなっているので. 通常のばねでは励起モード, つまり節が現れるような振動は実現しにくい.