近日点移動

tomocci

平成18年3月13日

概 要

Schwarzshild 計量における質点の運動を近似から求め, 近日点移動を計算する. 本稿も Landau[1] に基づく.

1 Schwarzshild 時空

一般相対論的な質量 m の質点の運動を記述する作用は, 計量を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

として

$$S = -m\int ds$$

で与えられる. 変分

$$\begin{aligned}\delta S &= -mg_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\bigg| - m\int\left\{\frac{d}{ds}\left(-g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\right) + \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\rho}{ds}\right\}\delta x^\mu ds \\ &= -mg_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\delta x^\mu\bigg| + m\int g_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}\right)\delta x^\mu ds\end{aligned}$$

によって測地線の方程式が得られるが, ここでは運動量

$$p_\mu = -mg_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds} = (-E, \boldsymbol{p})$$

に着目しよう. 運動量は (1) から

$$m^2 = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \tag{2}$$

を満たす.

(1) の具体的な形として, Schwarzshild 時空

$$ds^2 = fdt^2 - f^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3}$$

を考える. ここで

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}\ , \quad r_g = 2GM$$

である. 正準運動量はそれぞれ

$$\begin{aligned} E = mf\frac{dt}{ds} \quad &, \quad p_r = mf^{-1}\frac{dr}{ds} \\ p_\theta = mr^2\frac{d\theta}{ds} \quad &, \quad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{ds} \end{aligned}$$

なので (2) は

$$m^2 = f^{-1}E^2 - fp_r^2 - \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) \tag{4}$$

となるが, これは Hamiltonian $\mathcal{H}$ が

$$\mathcal{H} = \sqrt{fm^2 + f^2p_r^2 + \frac{f}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right)}$$

であることに対応している. ある正準変数の組 $\{q_k, p_k\}$ が, Hamiltonian の中に陰関数 $F(q,p)$ としてのみ含まれているとき, その陰関数は保存される:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(q,p) &= \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}\right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}\right)\frac{d\mathcal{H}}{dF} \end{aligned}$$

よって

$$l^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

と置けば, l は保存量となる. こうして (4) は, 更に動径方向の運動量を速度で書き表して整理すれば

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMl^2}{mr^3} = \frac{E^2 - m^2}{2m}$$

のように, あたかも Newton 的なエネルギーの表式となる. 従って “有効ポテンシャル”

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMl^2}{mr^3}$$

から, 安定点などの議論が出来ることとなる. (しかし r は飽くまでもパラメターであることに注意しなければならない.)

2　近似

近似操作をしよう．再び (4) に立ち戻る．Newton 的なエネルギーの表式に似せて書くと

$$\frac{p_r^2}{2m} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{m}{2} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{l^2}{2mr^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} \frac{E^2}{2m} = 0$$

となるが, このまま展開すると角運動量の部分から r_g/r の 1 次の次数で $1/r^3$ の項が出てきてしまう．そこでその項が 2 次に抑えられるように

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

と座標変換しよう．すると

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{r_g}{\rho} + \frac{r_g^2}{2\rho^2}\ ,\quad \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} \simeq 1 + \frac{2r_g}{\rho} + \frac{2r_g^2}{\rho^2}$$

より

$$\frac{p_r^2}{2m} - \frac{r_g}{2m\rho}(2E^2 - m^2) + \frac{1}{2m\rho^2}\left(l^2 - 2r_g^2E^2 + \frac{r_g^2m^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\frac{r_g^3}{\rho^3}) = \frac{E^2 - m^2}{2m}$$

さらに Newton 的エネルギー $E_N = E - m$ を用いて $E_N/m \simeq 0$ とすれば, 最終的に

$$\frac{p_\rho^2}{2m} - \frac{r_g m}{2\rho} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(l^2 - \frac{3r_g^2m^2}{2}\right) = E_N \tag{5}$$

を得る．ここで $p_\rho(\rho) = p_r(r(\rho))$ と置いたが, 両者は 2 次の次数で

$$\int d\rho\ p_\rho(\rho) = \int dr\ p_r(r) \simeq \int d\rho\ p_r(r(\rho))$$

のように一致するからである．こうして我々は, Newton 重力ポテンシャルが

$$-m\left(\frac{GM}{\rho} + \frac{3(GM)^2}{\rho^2}\right)$$

と修正されることを知る．これ以上の次数は静的な場以外の効果も無視できなくなる．

(5) の補正項の部分で

$$\mathit{\Delta} = \frac{3r_g^2m^2}{2l^2}$$

と置いて, 以下議論しよう．

2.1 Newton 重力

まず $\varDelta = 0$ のときの解を求めてみよう.

$$\begin{aligned} p_\rho(\varDelta = 0)^2 &= 2mE_N + \frac{r_g}{\rho} - \frac{l^2}{\rho^2} \\ &= l^2 \left(\frac{e^2}{\rho_0^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{r_g m^2}{2l^2}\ , \quad \frac{e^2}{\rho_0^2} = \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{2mE_N}{l^2}$$

と置いた. 近日点 ρ_- と遠日点 ρ_+ は

$$\rho_\pm = \frac{\rho_0}{1 \mp e}$$

作用は変数分離できて

$$S = -E_N t + l\varphi \pm \int d\rho\, p_\rho$$

φ は角運動量に対する回転角である. 回転角と半径の関係は

$$\text{const.} = \frac{\partial S}{\partial l} = \varphi \pm \frac{\partial}{\partial l} \int d\rho\, p_\rho$$

から求めることが出来る. よって

$$\int d\varphi = \pm \int \frac{d\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)}{\sqrt{\frac{e^2}{\rho_0^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2}}$$

これは変数変換 $1/\rho - 1/\rho_0 = (e/\rho_0)\cos\theta$ をすれば容易に積分でき,

$$\frac{e}{\rho_0}\cos\varphi = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$$

を得る. これより軌道は楕円を描くことが分かる. 従って長半径 a は

$$a = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2} = \frac{\rho_0}{1 - e^2}$$

と表される.

2.2 Newton 重力からのずれ

次に, $\varDelta$ を考慮して計算してみよう. 先程と同じ要領で書けば

$$\int d\varphi = \mp\frac{1}{\sqrt{1-\varDelta}}\int d\rho \frac{\frac{1}{\rho^2}}{\sqrt{\frac{e'^2}{\rho_0'^2}-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0'}\right)^2}}$$

のようになり, 本質的には因子 $(1-\varDelta)^{-1/2}$ だけの違いとなる. プライムの付いた量は

$$\frac{1}{\rho_0'}=\frac{r_g m^2}{2l^2(1-\varDelta)}\ ,\quad \frac{e'^2}{\rho_0'^2}=\frac{1}{\rho_0^2(1-\varDelta)^2}+\frac{2mE_N}{l^2(1-\varDelta)}$$

である. 解は第 0 近似と同様厳密に解け,

$$\frac{e'}{\rho_0'}\cos\left(\sqrt{1-\varDelta}\,\varphi\right)=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0'}$$

となる. よって近日点から次の近日点までの回転角

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\pi(1-\varDelta)^{-1/2}\\ &\simeq 2\pi+\frac{6\pi G^2M^2m^2}{l^2}\\ &\simeq 2\pi+\frac{6\pi GM}{a(1-e^2)}\end{aligned}$$

を得る.

参考文献

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. **場の古典論**. 理論物理学教程. 東京図書, 6 edition, 1994.