2つの質量

tomocci

平成 17 年 7 月 7 日

概 要

諸法則から重力質量と慣性質量を導出する.

1 重力と重力質量

地球表面上における物体は, 鉛直下向きに定常的な力を受ける. これを**重力**と呼ぶ. 物体に働く, 地球表面上における重力 F(地) と月面上における重力 F(月) は異なる値となる. しかし, 例えば異なる 2 物体 A, B において

$$\frac{F_A(\text{地})}{F_B(\text{地})} = \frac{F_A(\text{月})}{F_B(\text{月})},$$

即ち重力そのものは場所によって変わるのだが, 重力の比[1] はどの場所でも変わらないのである[2]. この事から, 我々は各物体ごとに固有の「何か」が存在するに違いないという結論に達するであろう. 我々はそれを**重力質量** (gravitational mass) と呼ぶことにする[3].

ある物体 A に働く重力を F と置こう. その物体 n 個を接着して 1 つの物体とみなし, これを A′ と呼ぼう. A′ に働く重力を F' とすれば, 力の合成が和で得られる事から

$$F' = nF \tag{1}$$

が導かれる. ここで**重力質量の合成が和で得られる**と仮定しよう. 即ち物体 A の重力質量を q と置けば, A′ の重力質量 q' は

$$q' = nq. \tag{2}$$

(1) と (2) より, k を**物質の種類や場所に無関係な**比例定数として

$$F = kq \tag{3}$$

が導かれる. この時点では力 F や重力質量 q の単位が定義されていないため, 比例定数 k も定まらない事に注意しよう.

[1]天秤ばかりによる測定で求められる.
[2]宇宙空間では重力は働かないので比が作れないが.
[3]あるいは電荷 (electric charge) にちなんで重力荷 (gravitational charge) と呼ぶべきかもしれない.

2　運動の第 2 法則と慣性質量

物体 A に任意の力 F を加えると, A はそれに比例して加速度 a で運動をする, 即ち

$$a = \frac{F}{k_A}$$

が成立する事が分かる. k_A は物質の種類に依存するであろう比例定数で, k_A が大きければ慣性は大きくなり, k_A が小さければ慣性は小さくなる.

ここで再び A を n 個用意し, 1 つの物体 (A$'$) とみなせるように接着する. A$'$ を構成する A (以下, 要素 A と呼ぼう) 一つ一つに, 上手い具合に力 $\frac{1}{n}F$ を加えるとしよう. これは力の合成則を利用して, A$'$ に加える力を丁度 F とするためである. 要素 A 一つ一つに運動方程式

$$a' = \frac{F}{nk_A}$$

が成立する. 要素 A と A$'$ の加速度は同じ a' であるから, この運動方程式は A$'$ に力 F を加えた時の運動方程式

$$a' = \frac{F}{k_{A'}}$$

と同一なはずである. 従って比例定数は

$$k_{A'} = nk_A \tag{4}$$

となり, **物体の量に応じて慣性の強さが大きくなる**ことが結論付けられる.

こうして我々は, 慣性の強さを表す, 複合物体に対しては和で合成されるような, 物体に固有の物理量が存在する事が得られた. それを**慣性質量** (inertial mass) と呼ぼう. 物体 A の慣性質量を m と置けば, A$'$ の慣性質量 m' は

$$m' = nm \tag{5}$$

となる. (4) 及び (5) より, 運動方程式は**物質の種類と無関係な**次元合わせのための比例定数を $\tilde{k}$ として

$$a = \tilde{k}\frac{F}{m}$$

となる. 加速度 a の単位は Length·Time^{-2} であるのに対して力 F と慣性質量 m の単位は定義されていないことに注意しよう. つまり力と慣性質量の単位を適当に定義すれば, $\tilde{k} = 1$ にすることが出来るのである. こうして運動方程式の最終的な形

$$ma = F \tag{6}$$

を得ることとなる.

3　落体の法則

物体に重力のみが働いているとき, その物体の種類と無関係に等加速度 g で落下する. 地球表面上における g はおよそ $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ である. この事を (3) と (6) を用いて考察してみよう.

慣性質量 m, 重力質量 q の物体 A が重力 kq を受け, ある加速度 a で運動する. 運動方程式は

$$ma = kq.$$

よって A の加速度は

$$a = k\frac{q}{m}$$

となるが, 落体の法則は $a = g$ であることを主張する. 即ち

$$k\frac{q}{m} = g.$$

これは次のように書き換えると分かり易いかもしれない.

$$\frac{q}{m} = \frac{g}{k}. \tag{7}$$

つまり**重力質量と慣性質量の比は物質の種類と無関係に一定**なのである. これは, 単位を適当に定義すれば, 重力質量と慣性質量を同一視することが出来るという結論に達する. これは**等価原理**と呼ばれる.

4　単位の決定

単位を適当に選び, $q = m$ と定義しよう. もはや重力質量と慣性質量の区別は無く, 単に質量と呼ぶことにする. (7) より, 重力の比例定数は $k = g$ と定まる. まとめると, 質量 m の物体に働く重力 F_g は

$$F_g = mg,$$

質量 m の物体に力 F が働いて加速度 a で運動する時の運動方程式は

$$ma = F$$

となる. ここで質量の単位を kg, 力の単位を N (Newton) とすれば,

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg{\cdot}m/s^2}$$

と定義出来る. こうして, 我々が普段目にする形式が得られるのである.

5　終わりに

面白いことに, 両者の導出は力の合成則が重要な役割を担っている事が分かる. また, 運動の第 2 法則は, 加速度と力が比例する事だけで十分であり, 質量に反比例する事は導出されるものである事も興味深い.