# 空気抵抗があるときの遠投

tomocci

平成18年2月11日

**概 要**

空気抵抗を無視した場合, 45° の角度で投げれば最も遠方まで飛ばすことが出来る. では空気抵抗があるときは一体どの角度で投げれば良いのだろうか. そんなものは数値計算をすれば一発で出るのだが, 筆者は数値計算が嫌いなためそんなことはしない. そもそも実際に遠投をするときに角度を測定する者はいまい. だいたいの事が分かりさえすれば良いのだ. 結論は "45° よりも低い角度で投げろ" となる.

## 1 空気抵抗無し

空気抵抗が無い場合, 水平方向は等速直線運動をし, 鉛直方向は下向きに重力加速度 $g$ と同じ加速度で等加速度直線運動をする. 水平方向, 鉛直方向の座標をそれぞれ $x(t)$, $y(t)$ と置いて初期条件を

$$\frac{dx(0)}{dt} = v\cos\theta,\ \frac{dy(0)}{dt} = v\sin\theta,\ x(0) = y(0) = 0$$

とすれば[1],

$$\begin{aligned} x(t) &= v\cos\theta\cdot t \\ y(t) &= v\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

となる.

ボールを投げ地面に落ちるまでの時間 $t_0(\neq 0)$ は $y(t_0) = 0$ を解けばよい.

$$\begin{aligned} 0 &= v\sin\theta\cdot t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\ &= t_0(v\sin\theta - \frac{1}{2}gt_0) \\ t_0 &= \frac{2v}{g}\sin\theta \end{aligned}$$

[1] 簡単のため $y(0) = 0$ の高さから投げるとしている.

このときの飛距離 $L_0(\theta) = x(t_0)$ は

$$L_0(\theta) = \frac{2v^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v^2}{g}\sin(2\theta)$$

であるから, $\theta = \pi/4$ で最も遠くまで飛ばせることが分かる. その距離は

$$L_0 = \frac{v^2}{g}$$

となる.

# 2　空気抵抗がある場合

　では, 空気抵抗がある場合はどうであろうか. 運動を解析的に解く以上性質の良い相互作用を採用したいのが心情である. 空気抵抗は低速度では近似的に速度に比例すると信じるならば, その比例定数を $m/\tau$ と置くことによって (ベクトル表記は太字にしている)

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m}{\tau}\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}$$

と書ける. 比例定数をこのように書いたのは,

$$\dim[\tau] = [\frac{\mathrm{mass}\cdot\mathrm{length}/\mathrm{time}}{\mathrm{force}}] = [\mathrm{time}]$$

のように, $\tau$ に時間の次元を持たせたいからである. さて, 興味があるのは実際にボールを投げるときの振る舞いである. 初速を $v$ とするとき, 経験的に空気抵抗は重力と比べて明らかに小さい. 即ち

$$\frac{mv}{\tau} \ll mg$$

これは, 遠投時間 $t_0(\sim v/g)$ に対して

$$t_0 \ll \tau$$

という関係が成り立つことを意味する. つまりこれを基にした近似操作は妥当であり, 以下これを踏まえて議論する.

　空気抵抗があるときの運動方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\frac{m}{\tau}\frac{dx(t)}{dt} \\ m\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -mg - \frac{m}{\tau}\frac{dy(t)}{dt} \end{aligned}$$

の様に書ける. $m$ は運動物体の質量である.

この微分方程式を初期条件

$$\begin{aligned}\frac{dx(0)}{dt} &= v\cos\theta = \frac{1}{2}gt_0\cot\theta \\ \frac{dy(0)}{dt} &= v\sin\theta = \frac{1}{2}gt_0 \\ x(0) &= y(0) = 0\end{aligned}$$

の下に解くわけだが ($t_0 = (2v/g)\sin\theta$ 但し $\theta = \pi/4$ とは限らない), 今着目している状況は空気抵抗が十分小さい場合である．従って右辺の $dx(t)/dt$, $dy(t)/dt$ を $t = 0$ の周りで展開しよう．

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &\simeq \frac{dx(0)}{dt} + \frac{d^2x(0)}{dt^2}t \\ \frac{dy(t)}{dt} &\simeq \frac{dy(0)}{dt} + \frac{d^2y(0)}{dt^2}t\end{aligned}$$

右辺の加速度は運動方程式より求まる．

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(0)}{dt^2} &= -\frac{1}{\tau}\frac{dx(0)}{dt} = -\frac{gt_0}{2\tau}\cot\theta \\ \frac{d^2y(0)}{dt^2} &= -g - \frac{1}{\tau}\frac{dy(0)}{dt} = -g\left(1 + \frac{t_0}{2\tau}\right)\end{aligned}$$

よって運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\frac{gt_0}{2\tau}\cot\theta\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -g\left(1 + \frac{t_0}{2\tau}\right)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\end{aligned}$$

となる．こうして

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{gt_0}{2}t\cot\theta\left(1 - \frac{t}{2\tau} + \frac{t^2}{6\tau^2}\right) \\ y(t) &= \frac{g\tau}{2}t\left\{\frac{t_0}{\tau} - \left(1 + \frac{t_0}{2\tau}\right)\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{3\tau^2}\right)\right\}\end{aligned}$$

を得る．

飛行時間 $t_1$ は $y(t_1) = 0$ を解けばよく, 近似の範囲で

$$t_1 = t_0 \left(1 - \frac{t_0}{6\tau}\right)$$

を得る. 飛距離 $L(\theta) = x(t_1)$ は

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= \frac{1}{2} g t_0^2 \cot\theta \left(1 - \frac{3t_0}{2\tau} + \frac{3t_0^2}{4\tau^2}\right) \\
&\simeq \frac{1}{2} g t_0^2 \cot\theta \left(1 - \frac{3t_0}{2\tau}\right) \\
&= \frac{v^2}{g} \sin(2\theta) \left(1 - \frac{3v}{g\tau} \sin\theta\right)
\end{aligned}$$

となる. 空気抵抗が無視できる場合 $(\tau \to \infty)$, 飛距離が最大となる角度は $\theta = \pi/4$ であるので, その周りに解があるはずである.

$$0 = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{v^2}{g} \left(2\cos(2\theta) - \frac{3v}{g\tau} \left(2\cos(2\theta)\sin\theta + \sin(2\theta)\cos\theta\right)\right)$$

に $\theta = \pi/4 + \delta$ を代入し, 1 次の微小量のみ残せば

$$\delta = -\frac{3\sqrt{2}v}{8g\tau}$$

を得る. つまり $45^\circ$ よりやや低い角度で投げる方が遠くに飛ばせるのである. その距離は

$$L = \frac{v^2}{g} \left(1 - \frac{3\sqrt{2}v}{2g\tau}\right)$$

となる.