一般相対論の数学的準備など

tomocci

平成 18 年 7 月 5 日

概 要

曲がった時空における数学などを大雑把に導入する. 数学的に厳密な定義はしない. 微分形式やベクトル束にも触れない. また, 計算ミスはご愛敬.
項目：接空間, 余接空間, 計量, 共変微分, Lie 微分, 捩率と曲率, 接続形式の表式, 測地線の方程式, Einstein 方程式, Newton 近似.

1　接空間

時空 M を n 次元 C^∞ 級微分可能多様体であると仮定する.

実数 s で径数付けられた, M 上の点 p を通る滑らかな曲線を考える. M 上の関数 f の, 点 p における方向微係数は

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_p f = \left.\frac{dx^\mu}{ds}\partial_\mu\right|_p f$$

であるが, この写像

$$\boldsymbol{X}|_p = X^\mu \partial_\mu|_p = \left.\frac{dx^\mu}{ds}\partial_\mu\right|_p$$

を点 p における接ベクトルとして定義する. 上記の場合 ∂_μ が基底で特に座標基底と呼ばれ, X^μ は座標基底における成分である. 本稿では, 座標基底を除いてベクトル及びテンソルを太字で表記する.

点 p を通る滑らかな曲線が作る接ベクトルの集合は, ベクトル空間を成す. これを接空間 TM_p と呼ぶ. M 上の滑らかな関数 $F(M)$ に対して, 滑らかなベクトル $\boldsymbol{X}(F(M))$ が定義できる. これをベクトル場と呼ぶ.

TM_p における基底を

$$\boldsymbol{e}_i = e_i^\mu \partial_\mu$$

とする. 任意のベクトル場 $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{e}_i$ と書ける.

2 余接空間

TM_p に双対な空間 (余接空間) T^*M_p を導入しよう. 双対という言葉は, 接空間のベクトル場 (接ベクトル場) と余接空間のベクトル場 (余接ベクトル場) の組を実数に対応付けられるという意味で用いている.

T^*M_p の基底 $\boldsymbol{\theta}^i$ との間に, 内積

$$\langle \boldsymbol{\theta}^i | \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta^i_j \ , \ \ \langle \cdot | \boldsymbol{e}_i \rangle \boldsymbol{\theta}^i = \boldsymbol{e}_i \langle \boldsymbol{\theta}^i | \cdot \rangle = 1$$

が定義される. 同様にして余接空間の座標基底 dx^μ も導入しておこう.

$$\langle dx^\mu | \partial_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu \ , \ \ \langle \cdot | \partial_\mu \rangle dx^\mu = \partial_\mu \cdot \langle dx^\mu | \cdot \rangle = 1$$

3 計量

計量テンソル場 $\boldsymbol{g} \in T^*M_p \times T^*M_p$ を

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \eta_{ij} = \mathrm{diag}(\eta, \zeta, \cdots, \zeta)$$

のように定義する. ここで組 (η, ζ) は, (+,+), (+,−), (−,+) のいずれかの符号をとる. $\boldsymbol{\theta}^i$ で表せば

$$\boldsymbol{g} = \eta_{ij} \boldsymbol{\theta}^i \otimes \boldsymbol{\theta}^j$$

これに対して計量の逆 $\boldsymbol{g}^{-1} = \eta^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ $(\eta^{ij} = \eta_{ij})$ も導入しておく.

座標基底を用いて $\boldsymbol{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) = \eta_{ij} \theta^i_\mu \theta^j_\nu = g_{\mu\nu}$, $\boldsymbol{g}^{-1}(dx^\mu, dx^\nu) = \eta^{ij} e^\mu_i e^\nu_j = g^{\mu\nu}$ としたときの $g_{\mu\nu}$ もまた $\boldsymbol{g}$ と同様に, 計量 (計量テンソル場) と呼ばれる. 重力場と言うこともある. 明らかに

$$\eta^{ik} \eta_{kj} = \delta^i_j \ , \ \ g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$

である. 計量の行列式は $g = \det(g_{\mu\nu}) = \eta \zeta^{n-1} (\det(\theta^i_\mu))^2 = \eta \zeta^{n-1} (\det(e^\mu_i))^{-2} = \det(g^{\mu\nu})^{-1}$ となる.

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の内積は

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \eta_{ij} A^i B^j = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

のように定義される. 双対ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}$ には計量によって $\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}, \cdot)$ で得られるベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}'$ が対応する. つまり双対ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の内積はベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}'$, $\boldsymbol{A}$ の内積と同等である:

$$\langle \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{A} \rangle = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{A})$$

4　共変微分

時空上の点 x^μ 上の関数 $f(x)$ に対して, その点を通る滑らかな曲線に沿って径数 λ だけ離れた点 $y^\mu = x^\mu + \lambda X^\mu(x)$ ($|\lambda| \ll 1$) 上の関数 $f(y)$ は

$$f(y) = f(x) + \lambda \boldsymbol{X} f(x)$$

と書かれる. $\boldsymbol{X} = X^\mu \partial_\mu$ はこの曲線の接ベクトルである. 関数の変化率は

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(y)|_{y=x+\lambda X} - f(x)}{\lambda} = \boldsymbol{X} f(x)$$

で良いわけだが, ベクトルの場合はそうは行かない. 素朴に考えればベクトルの引き算をするとき, 始点を合わせなければならないからだ. そこで y 上のベクトルを x まで "微小平行移動" をする操作を以下に定義していく.

y 上の基底 $\boldsymbol{e}_i(y)$ を曲線に沿って x まで微小平行移動したものを $\boldsymbol{e}_{i\parallel}(x)$ と書こう. 我々は関数の変化率に対する拡張として微小平行移動を定義したいので, これに倣って

$$\boldsymbol{e}_{i\parallel}(x) = \boldsymbol{e}_i(x) + \lambda \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}_i(x)$$

と置く. $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ を共変微分と呼ぶ.

上の導入から, 微小平行移動された $\boldsymbol{e}_{i\parallel}$ は x におけるベクトル場なので, 共変微分は $\boldsymbol{e}_i(x)$ で展開でき,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \cdot \langle \boldsymbol{\omega}^j{}_i | \boldsymbol{X} \rangle$$

この双対ベクトル場 $\boldsymbol{\omega}^i{}_j$ は接続係数と呼ばれる. この時点では, 接続係数に何の条件も付けていない.

一般のベクトル場 $\boldsymbol{A} = A^i(y)\boldsymbol{e}_i(y)$ を微小平行移動した $\boldsymbol{A}_\parallel(x) = A^i(y)\boldsymbol{e}_{i\parallel}(x)$ も基底の時と分け隔てなく書かれなければならない. $\omega^i{}_{j\mu} = \langle \boldsymbol{\omega}^i{}_j | \partial_\mu \rangle$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_\parallel(x) &= A^i(y)\boldsymbol{e}_{i\parallel}(x) \\ &= (A^i + X^\mu \partial_\mu A^i)(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j \omega^j{}_{i\mu} X^\mu) \\ &= \boldsymbol{A}(x) + X^\mu(\partial_\mu A^i + \omega^i{}_{j\mu} A^j)\boldsymbol{e}_i \\ &= \boldsymbol{A}(x) + \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A}(x) \end{aligned}$$

Leibnitz 則 $\nabla_{\boldsymbol{X}}(A^i \boldsymbol{e}_i) = (\nabla_{\boldsymbol{X}} A^i)\boldsymbol{e}_i + A^i \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}_i$ を課して上と比較すれば, 関数 f に対して $\nabla_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f$ となることが分かる. また, ベクトルの線形性から $\nabla_{f\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}} = f\nabla_{\boldsymbol{X}} + \nabla_{\boldsymbol{Y}}$ も得られる.

$\nabla_\mu = \nabla_{\partial_\mu}$ と書くことにすれば, $\nabla_{\boldsymbol{X}} = X^\mu \nabla_\mu$ となり, 普通の微分を拡張したものとして自然な表記 $\nabla_{\boldsymbol{X}} f = X^\mu \nabla_\mu f = X^\mu \partial_\mu f$ が出来る.

こうして一般のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の共変微分

$$\nabla_\mu \boldsymbol{A} = (\partial_\mu A^i + \omega^i{}_{j\mu} A^j) \boldsymbol{e}_j$$

を得る. 混乱するかと思うが, $(\nabla_\mu \boldsymbol{A})^i$ の意味で $\nabla_\mu A^i$ と書く場合が多々ある.

$\boldsymbol{\theta}^i$ に対する共変微分は, $\langle \boldsymbol{\theta}^i | \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta^i_j$ より

$$\nabla_\mu \boldsymbol{\theta}^i = -\omega^i{}_{j\mu} \boldsymbol{\theta}^j$$

座標基底に対する共変微分を

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \partial_\rho$$

とすれば,

$$\nabla_\mu \boldsymbol{A} = (\partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} A^\rho) \partial_\nu$$

となる. ここでも $(\nabla_\mu \boldsymbol{A})^\nu$ の意味で $\nabla_\mu A^\nu$ と書く場合があることに注意しよう.

$\omega^i{}_{j\mu}$, $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ の間には $\nabla \boldsymbol{e}_i = \nabla_\mu (e^\mu_i \partial_\mu)$ から

$$\begin{aligned} \omega^i{}_{j\mu} &= \theta^i_\rho (\partial_\mu e^\rho_j + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} e^\nu_j) \\ \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} &= e^\rho_i (\partial_\mu \theta^i_\nu + \omega^i{}_{j\mu} \theta^j_\nu) \end{aligned}$$

という関係が得られる.

5 Lie 微分

再び滑らかな曲線を考え, 曲線上の 2 点 x^μ, $y^\mu = x^\mu + \lambda X^\mu(x)$, $(|\lambda| \ll 1)$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{A}(x)$ と $\boldsymbol{A}(y)$ の変化率を, 微小平行移動とは違った方法で定義しよう.

今度は y 上のベクトル場 $\boldsymbol{A}(y)$ に等しい x 上のベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{A}}(x)$ を見つける. ここで "等しい" とは, 関数 $f(y)$ に対して同一の値

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(x) f(y(x)) = \boldsymbol{A}(y) f(y)$$

を与えるという意味である.

座標基底を用いれば, 異なる 2 点における座標変換を考えればよいので

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}}(x) &= \boldsymbol{A}(y)\big|_{y=x+\lambda X} \\ &= \left.\frac{\partial x^\mu(y)}{\partial y^\nu} A^\nu(y)\right|_{y=x+\lambda X} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

こうして Lie 微分が

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(\left.\frac{\partial x^\mu(y)}{\partial y^\nu} A^\nu(y)\right|_{y=x+\lambda X} - A^\mu(x) \right) \partial_\mu$$

と定義される. 具体的に見てみると

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A} &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left((\delta^\mu_\nu - \lambda \partial_\nu X^\mu)(A^\nu + \lambda X^\rho \partial_\rho A^\nu) - A^\mu \right) \partial_\mu \\ &= (X^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\nu \partial_\nu X^\mu) \partial_\mu \end{aligned}$$

これから $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X} = -\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{A}$, $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{A}} + \mathfrak{L}_{\boldsymbol{B}}$, $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}}(f\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{X}f)\boldsymbol{A} + f\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A} \to \mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f$ そして $\mathfrak{L}_{f\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} = f \mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{Y} f) \boldsymbol{X}$ などの性質を持つことが分かるであろう.

ところで, 関数 f にベクトル場 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ を順に作用させると

$$Y^\mu \partial_\mu (X^\nu \partial_\nu f) = Y^\mu (\partial_\mu X^\nu) \partial_\nu f + Y^\mu X^\nu \partial_\mu \partial_\nu f$$

のようになり, ベクトル場 2 つの作用は第 2 項目のためベクトル場とはならない. これを反対称化したものはベクトル場となる. 即ち, 交換子

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] f &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y} f) - \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X} f) \\ &= (X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu) \partial_\mu f \end{aligned}$$

はベクトル場となる. これは Lie 微分と一致する:

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]$$

特に座標基底に対して $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \partial_\mu = -(\partial_\mu X^\nu) \partial_\nu$ となるので, 双対基底に対しては $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} dx^\mu = (\partial_\nu X^\mu) dx^\nu$ となる. よって双対ベクトル場に対する Lie 微分

$$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\alpha} = (X^\nu \partial_\nu \alpha_\mu + \alpha_\nu \partial_\mu X^\nu) dx^\mu$$

を得る.

6 共変微分と Lie 微分

Lie 微分は考えている曲線に強く依存する. 例えば, 2 次元直交座標における単位円に沿った Lie 微分を考える. 点 (x^1, x^2) を原点の周りに反時計周りに角度 θ だけ回転した点を (y^1, y^2) とすると, 近似無しに

$$\begin{aligned}\tilde{A}^1(x) &= A^1(y(x))\cos\theta + A^2(y(x))\sin\theta \\ \tilde{A}^2(x) &= -A^1(y(x))\sin\theta + A^2(y(x))\cos\theta\end{aligned}$$

のように回転を受け,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A})^1 &= -x^2\partial_1 A^1 + x^1\partial_2 A^1 + A^2 \\ (\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A})^2 &= -x^2\partial_1 A^2 + x^1\partial_2 A^2 + A^1\end{aligned}$$

となる (接ベクトル場は $X^\mu = (-x^2, x^1)$).

これが単位円でなく直線に沿ったものであると, ベクトル場は回転を受けないため単に $\tilde{A}^i(x) = A^i(y(x))$ となり, 上式の最後の項は現れない. Lie 微分とは, 特定の曲線を基準とした時のベクトル場の変化率を意味するのである. 実際, ベクトル場 $\boldsymbol{X} = d/dt$ に平行なベクトル場 $f\boldsymbol{X}$ の $\boldsymbol{X}$ に沿った Lie 微分は $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{X}}(f\boldsymbol{X}) = (df/dt)\boldsymbol{X}$ となる.

これに対して共変微分の場合, 曲線の曲がり具合つまり接ベクトル場の変化率には依存しない. 共変微分によって導入された双対ベクトル場である接続係数 $\boldsymbol{\omega}^i{}_j$ は曲線のとり方とは無関係であり, 従って接続係数及びその変化率が時空の歪み具合を担っているであろうことが予想できる.

7　捩率と曲率

普通の微分は交換可能であるが, 共変微分は一般に可換でない. ベクトル場 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ に沿った共変微分の交換子は座標基底で

$$[\nabla_{\boldsymbol{X}}, \nabla_{\boldsymbol{Y}}] = X^\mu Y^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu] + [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]^\mu \nabla_\mu$$

のようになり, 普通微分の交換子 $[\partial_\mu, \partial_\nu]$ に対応する $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ を見るには

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}$$

を調べればよいことになる. 共変微分の性質から, この演算はスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{Z}$ に対して異なる結果を与えるので, 次のように異なる記号を用いよう. それぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) f &= (\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} - [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]) f \\
\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \boldsymbol{Z} &= (\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}) \boldsymbol{Z}
\end{aligned}$$

とする. $\boldsymbol{T}$ は捩率テンソル場 (torsion tensor field), $\boldsymbol{R}$ は曲率テンソル場 (curvature tensor field) または Riemann 曲率テンソル場, Riemann テンソル場などと呼ばれる. 単なる共変微分の交換子でないこの定義によって $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = X^i Y^j \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ などのテンソル的性質を与えることが出来るのである.

まず捩率を求めてみよう. $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ として座標基底を選べば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\partial_\mu, \partial_\nu) f &= ({\Gamma^\rho}_{\mu\nu} - {\Gamma^\rho}_{\nu\mu}) \partial_\rho f \\
&= {T^\rho}_{\mu\nu} \partial_\rho f \\
&= {T^i}_{\mu\nu} \boldsymbol{e}_i f
\end{aligned}$$

最後の $T^i_{\mu\nu} = \theta^i_\rho {T^\rho}_{\mu\nu}$ は ${\omega^i}_{j\mu}$ と ${\Gamma^\rho}_{\mu\nu}$ の関係から

$$T^i_{\mu\nu} = 2(\partial_{[\mu}\theta^i_{\nu]} + {\omega^i}_{j[\mu}\theta^j_{\nu]})$$

と書ける. ここで添字の角括弧 $[\cdots|$, $|\cdots]$ は, 間に挟まれている添字について完全反対称化を行う事を意味しており, 丸括弧 $(\cdots|$, $|\cdots)$ は完全対称化を意味する.

次に曲率について見て見よう. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})(f\boldsymbol{Z}) = f\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}$ なので, $\boldsymbol{Z}$ として ∂_μ のみ調べれば良いのだが, $\boldsymbol{e}_i$ についても計算してみよう.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma &= \partial_\rho \cdot 2(\partial_{[\mu}{\Gamma^\rho}_{\nu]\sigma} + {\Gamma^\rho}_{[\mu|\lambda}{\Gamma^\lambda}_{|\nu]\sigma}) \\
&= \partial_\rho \cdot {R^\rho}_{\sigma\mu\nu} \\
\boldsymbol{R}(\partial_\mu, \partial_\nu)\boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{e}_i \cdot 2(\partial_{[\mu|}{\omega^i}_{j|\nu]} + {\omega^i}_{k[\mu|}{\omega^k}_{j|\nu]}) \\
&= \boldsymbol{e}_i \cdot {R^i}_{j\mu\nu}
\end{aligned}$$

${R^\rho}_{\sigma\mu\nu}$ と ${R^i}_{j\mu\nu}$ の間には ${R^i}_{j\mu\nu} = \theta^i_\rho e^\sigma_j {R^\rho}_{\sigma\mu\nu}$ という関係が成り立つ.

8　接続係数の表式

この節では, η^{ij}, η_{ij} で添字 $i, j, k, \cdots$ の上げ下げを, $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ で添字 $\mu, \nu, \rho, \cdots$ の上げ下げをそれぞれ行うものとする.

微小平行移動に内積を保存するという条件を課そう. これは $\boldsymbol{g}_{\parallel} = \boldsymbol{g}$ 即ち $\nabla_\mu \boldsymbol{g} = 0$ を意味し, 共変微分は計量と両立する (compatible) と言う. 計量 $\boldsymbol{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ に ∇_μ を作用させれば

$$\Gamma_{\mu,\rho\nu} + \Gamma_{\nu,\rho\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu}$$

を得る. 今, $\Gamma_{\rho,\mu\nu} = S_{\rho,\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\rho,\mu\nu}$ のように μ, ν に関して対称部分 $S_{\rho,\mu\nu} = \Gamma_{\rho,(\mu\nu)}$ と反対称部分 $\frac{1}{2} T_{\rho,\mu\nu} = \Gamma_{\rho,[\mu\nu]}$ に分ければ, 上の関係式は

$$S_{\mu,\rho\nu} + S_{\nu,\rho\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - T_{(\mu|,\rho|\nu)}$$

これを全ての添字に関して巡回的に置換し, 足し引きすれば S が求まり,

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} = \Gamma^{(0)}{}_{\rho,\mu\nu} - T_{(\mu,\nu)\rho} + \frac{1}{2} T_{\rho,\mu\nu}$$

を得る. ここで

$$\Gamma^{(0)}{}_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

で定義される $\Gamma^{(0)\rho}{}_{\mu\nu}$ を Christoffel 記号と呼ぶ.

同様にして, $\boldsymbol{g} = \eta_{ij} \boldsymbol{\theta}^i \otimes \boldsymbol{\theta}^j$ の共変微分をとって得られる関係式

$$\omega_{ij\mu} + \omega_{ji\mu} = 0$$

と捩率の定義に $e_i^\mu e_j^\nu$ を乗じたもの

$$e_i^\mu e_j^\nu T_{k\mu\nu} = 2 e_{[i}^\mu e_{j]}^\nu (\partial_\mu \theta_{k\nu} + \omega_{kl\mu} \theta_\nu^l)$$

をやはり i, j, k に関して巡回的に置換したものを足したり引いたりすれば

$$\omega_{ij\mu} = -e_{[i}^\rho e_{j]}^\sigma \theta_\mu^i \partial_\rho \theta_\sigma^k + e_{[i|}^\nu \partial_\mu \theta_{|j]\nu} - e_{[i|}^\nu \partial_\nu \theta_{|j]\mu} + e_{[i}^\nu T_{j]\nu\mu} + \frac{1}{2} \theta_\mu^k e_i^\rho e_j^\sigma T_{k,\rho\sigma}$$

を得る.

9　測地線の方程式

2 点 $P,\ Q$ を通る曲線 C の長さ L を

$$L = \int_P^Q dt\ |X^2|^{1/2}$$

と定義する．ここで C は実数 t で径数付けられ, 接ベクトルを $\boldsymbol{X} = X^\mu \partial_\mu = (dx^\mu/dt)\partial_\mu$ としている．また, 内積を $X^2 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$ と置いた．

L が停留値をとるとき, 曲線 C は測地線と呼ばれる．L に変分 δx^μ を施し, 測地線の方程式を導出しよう．

$$\delta L = \left.\frac{X_\mu \delta x^\mu}{|X^2|^{1/2}}\right|_P^Q - \int_P^Q dt\ \frac{\mathrm{sgn}(X^2)}{|X^2|^{1/2}}\delta x_\mu \left(\delta^\mu_\nu - \frac{X^\mu X_\nu}{X^2}\right)\left(\frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma^{(0)\nu}{}_{\rho\sigma}X^\rho X^\sigma\right)$$

ここで $\delta x_\mu = g_{\mu\nu}\delta x^\nu,\ X_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu$ 及び $\mathrm{sgn}(X^2) = X^2/|X^2|$ である．こうして

$$\left(\delta^\mu_\nu - \frac{X^\mu X_\nu}{X^2}\right)\left(\frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma^{(0)\nu}{}_{\rho\sigma}X^\rho X^\sigma\right) = 0$$

を得る．

径数 t を $\boldsymbol{X} = (ds/dt)\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}) = \mathrm{const.}$ を満たすように変数変換 $t \to s = s(t)$ してやると簡単になる:

$$\frac{dT^\mu}{ds} + \Gamma^{(0)\mu}{}_{\rho\sigma}T^\rho T^\sigma = 0$$

この s をアフィン径数 (アファイン径数, affine parameter) と呼ぶ．

さて, 接ベクトル場 $\boldsymbol{X}$ を自身に沿って微小平行移動させよう．

$$\boldsymbol{X}_\parallel = \boldsymbol{X} + \lambda \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\ ,\quad |\lambda| \ll 1$$

平坦な時空であれば直線の接ベクトル場は平行移動で不変である．これに倣って曲がった時空における “最もまっすぐな曲線” を, 接ベクトル場が

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} = f\boldsymbol{X}$$

という条件を満たすときであるとしよう．f はある関数である．このとき $\boldsymbol{X}_\parallel = (1+\lambda f)\boldsymbol{X}$ であり, 平行移動後も元の $\boldsymbol{X}$ に比例したままとなる．上の式を座標基底で表すと

$$\frac{dX^\mu}{dt} + \Gamma^{(0)\mu}{}_{\rho\sigma}X^\rho X^\sigma - g^{\mu\tau}T_{\rho,\sigma\tau}X^\rho X^\sigma = fX^\mu$$

となる．左から X_μ を掛ければ f が求まり,

$$\left(\delta^\mu_\nu - \frac{X^\mu X_\nu}{X^2}\right)\left(\frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma^{(0)\nu}{}_{\rho\sigma}X^\rho X^\sigma\right) - g^{\mu\tau}T_{\rho,\sigma\tau}X^\rho X^\sigma = 0$$

を得る．このように捩率を持つときは, 長さが最短であるような曲線と, 接ベクトルが常に平行であるような曲線は一致しないことが分かる．

10　Einstein 方程式

捩率はないとして重力場の作用を考えていこう．ここでは Minkowski 時空のみを扱いたいため, $\zeta = -\eta$ とする．重力場においては Einstein-Hilbert 作用, 物質場として質点の作用

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{-\eta}{2\kappa}\int d^n x\ \sqrt{\eta g}\ g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \\ S_m &= -m\int d\tau \end{aligned}$$

を用いる．ここで $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$, $d\tau^2 = \eta g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} > 0$ である．まず S_g の変分は $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$, $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}$, $\delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu]\nu}$ などを用いて

$$\delta S_g = \frac{\eta}{\kappa}\int d^n x\ \partial_{\mu}(\sqrt{\eta g}\ g^{\sigma[\mu}\delta\Gamma^{\nu]}{}_{\nu\sigma}) - \frac{\eta}{2\kappa}\int d^n x\ \sqrt{\eta g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}$$

但し $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ である．次に S_m は $\delta d\tau = -\frac{1}{2}\eta v_{\mu}v_{\nu}d\tau\delta g^{\mu\nu}$, $v_{\mu} = g_{\mu\nu}dx^{\nu}/d\tau$ より

$$\delta S_m = \frac{\eta m}{2}\int d^n x\int d\tau\ v_{\mu}(\tau)v_{\nu}(\tau)\delta^n(x - z(\tau))\delta g^{\mu\nu}$$

ここで $z(\tau)$ は質点の軌跡である．よってエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{\eta g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \eta m\int d\tau\ \frac{1}{\sqrt{\eta g(x)}}v_{\mu}(\tau)v_{\nu}(\tau)\delta^n(x - z(\tau))$$

を得る．こうして Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \eta\kappa T_{\mu\nu}$$

が導かれる．

11 Newton 近似

引き続き摂率無し, $\zeta=-\eta$ で話を進める. 計量 (の成分) が

$$|-\eta g_{ab}-\delta_{ab}|\sim|g_{0a}|\sim\partial_0 g_{\mu\nu}\sim|\eta g_{00}-1|^2\sim 0$$

を満たし, かつ重力源である質点が静止しているとみなせるとき, Newton 的な重力場の方程式に一致することを見る.

まず $\eta=g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\sim g_{00}(v^0)^2$ から $v^0\sim(\eta g_{00})^{-1/2}$ を得る. 測地線の方程式は

$$\frac{dv^a}{dx^0}=\frac{1}{v^0}\frac{dv^a}{d\tau}=-\frac{1}{v^0}\Gamma^a{}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\sim-\Gamma^a{}_{00}v^0\sim-\Gamma^a{}_{00}=F^a$$

$\boldsymbol{F}\sim-\mathrm{grad}(\frac{1}{2}\eta g_{00})$ は単位質量あたりの重力を表す. 電磁気で言う電場を意味する量である. ここから $\eta g_{00}=1+2\phi$ としたときの ϕ が Newton 的なポテンシャルを表すことが推測できる.

続いて Einstein 方程式の両辺の trace をとって

$$R_{\mu\nu}=\kappa(T_{\mu\nu}-\frac{1}{n-2}g_{\mu\nu}T)$$

のように書き直してから近似操作に入る. それぞれ

$$R_{00}=R^\mu{}_{0\mu0}\sim\partial_a\Gamma^a{}_{00}\sim-\mathrm{div}\boldsymbol{F}$$

$$T=g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\sim g^{00}T_{00}\ ,\quad T_{00}\sim\eta m\delta^{n-1}(\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned}T_{00}-\frac{1}{n-2}g_{00}T &\sim \left(1-\frac{1}{n-2}g_{00}g^{00}\right)T_{00}\sim\frac{n-3}{n-2}T_{00}\\ &\sim \eta m\frac{n-3}{n-2}\delta^{n-1}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となる. よって Gauss の法則型の方程式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=-\kappa m\frac{n-3}{n-2}\delta^{n-1}(\boldsymbol{x})$$

を得る. 直ちに $n-1$ 次元球対称解が求まり,

$$F_r=-\frac{n-3}{\Omega_{n-2}(n-2)}\frac{\kappa m}{r^{n-2}}$$

Ω_{n-2} は $n-2$ 次元立体角で

$$\Omega_{n-2}=\begin{cases}2^{n/2}\pi^{(n-2)/2}/(n-3)!! & (n\ \text{even})\\ 2\pi^{(n-1)/2}/(\frac{n-1}{2})! & (n\ \text{odd})\end{cases}$$

特に $n=4$ のとき $\kappa=8\pi G$ (G は Newton 定数).