等価原理と電磁場

ともっち

平成16 年5 月18 日

曲がった時空における電磁場の方程式を、場の強さではなくゲージポテンシャルで記述すると、重力場との非最小相互作用項が現れてしまい等価原理が破れるという議論がある。しかしそれは杞憂であることを解説する。

1　等価原理

時空上の微小な2 点間の距離 ds は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

のように書かれ、計量 $g_{\mu\nu}$ が一定であるような点あるいは領域は局所慣性系と呼ばれる。一般相対論の言う等価原理 (equivalence principle) とは、一言で言うと

局所慣性系では重力の効果はなくなる

と表される。重力の効果とは何か。それは時空の歪みを表すテンソル量あるいはスカラー量が作用することである。

等価原理の要請を満たすためには、運動方程式の中に Riemann テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, Ricci テンソル $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ そしてスカラー曲率 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ が現れてはいけない ($g^{\mu\nu}$ は計量の逆行列 $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$)。テンソルやスカラーは座標変換に対して線形に変換を受けるので、ある座標系で全ての成分がゼロならば、全ての座標系で全ての成分がゼロとなる。つまり局所慣性座標系において Riemann テンソルなどが顔を現さないのであれば、全ての座標系で現れず、逆に、ある非慣性座標系で Riemann テンソルなどが方程式に現れているのならば、局所慣性系においてもその項は消えることはない。

2　最小結合

それではどのように重力相互作用を記述するのかというと、最小結合 (minimal coupling) と呼ばれる指導原理に基づいて行われる。微分演算子 $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ を共

変微分 ∇_μ に置き換えるだけの操作である。共変微分はスカラー場 ϕ 及びベクトル場 A^μ に対して

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \ , \quad \nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} A^\rho$$

のように作用し、$\nabla_\mu A^\nu$ は 2 階のテンソル場として振舞う。Christoffel 記号 $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

は、計量の 1 階微分との間に

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = 0 \iff \partial_\sigma g_{\alpha\beta} = 0$$

という関係があり、適当な座標変換によって局所慣性系に移ったとき、$\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ はゼロとなり、共変微分は普通の微分となるのである。

また、共変微分は普通の微分と違い一般に非可換である。つまりベクトル場 X^μ に対して $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) X^\rho \neq 0$ であり、そのお釣りの部分は

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) X^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} X^\sigma$$

のように Riemann テンソルとして定義される。

3　曲がった時空における Maxwell 方程式

本稿の主題である電磁場の方程式を見てみよう。局所慣性系においては

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$$

である。J^μ は 4 元電流で、$F_{\mu\nu}$ は場の強さ (field strength) と呼ばれる電場と磁場を一筆で表したものである。場の強さはゲージポテンシャル A_μ によって $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と表され、Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} J^\mu &= \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu \\ &= \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

となり、Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu_{\mathrm{L}} = 0$ では d'Alembert 方程式となる。

さて、これを最小結合によって一般相対論的に直そう。

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$$

に対して

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \tag{1}$$

ゲージポテンシャルで書き直せば

$$\begin{aligned} J^\mu &= \nabla_\nu \nabla^\mu A^\nu - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \\ &= g^{\mu\rho}(\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu) A^\nu + \nabla^\mu(\nabla_\nu A^\nu) - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \\ &= g^{\mu\rho} R^\nu{}_{\sigma\nu\rho} A^\sigma + \nabla^\mu(\nabla_\nu A^\nu) - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \\ &= R^\mu_\nu A^\nu + \nabla^\mu(\nabla_\nu A^\nu) - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \end{aligned} \tag{2}$$

となり、Ricci テンソルが顕になり、“Lorentz ゲージ” $\nabla_\mu A^\mu_{\mathrm{L}} = 0$ においては

$$R^\mu_\nu A^\nu_{\mathrm{L}} - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu_{\mathrm{L}} = J^\mu \tag{3}$$

となる。

さて、これらを局所慣性系に持っていったらどうであろうか。一見したところ場の強さに関する方程式 (1)、ゲージポテンシャルに関する方程式 (2) はそれぞれ

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} =_? J^\mu \tag{4}$$

$$R^\mu_\nu A^\nu + \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu =_? J^\mu \tag{5}$$

になるように思われる。場の強さに対しては重力は消えているが、ゲージポテンシャルに対して消えていない。別の言い方をすれば、場の強さは等価原理を満たしているが、ゲージポテンシャルは満たしていないように思われる。このようなことがあっていいのであろうか。

4 局所慣性系

結論から言うと、(5) 式は間違いなのである。局所慣性系において Christoffel 記号はゼロであるが、その微分はゼロとは限らない。しかも局所慣性系に持っていかなくても、実は Maxwell 方程式 (1) に計量の 2 回微分、つまり曲率は入ってこないのである。場の強さは $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu}$ より

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

と普通の微分で表され、Maxwell 方程式には高々計量の 1 階微分しか現れないのである (ゲージポテンシャルは反変ベクトル場である)。実際に見てみよう。

$$\begin{aligned} J^\mu &= \nabla_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \{\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\} \\ &\simeq \eta^{\nu\rho} \partial^\mu (\partial_\nu A_\rho) - \eta^{\mu\rho} \partial_\nu \partial^\nu A_\rho \end{aligned}$$

ここで $\simeq$ は局所慣性系でのみ成り立つ等号を意味する。また、$g = \det(g_{\mu\nu})$ であり、$\eta^{\mu\nu}$ は 1 階微分がゼロであるような計量である。こうしてゲージポテンシャルで書いた方程式にも重力相互作用項は現れないことが分かった。

ではなぜ (2) に Ricci テンソルが現れたのであろうかと言うと、簡単に言えば現れたように見えるだけであって、Ricci テンソルによる重力の効果は他の項の重力の効果と綺麗に相殺してしまうのである。これも確かめてみよう。まず d'Alembert 演算子の項を見ると

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu \simeq \eta^{\mu\rho}\partial^\nu\partial_\nu A_\rho - \eta^{\mu\rho}(\partial^\nu\Gamma^\lambda_{\nu\rho})A_\lambda$$

となる。スカラー場に対する $\nabla^\mu\nabla_\mu$ は局所慣性系で $\partial^\mu\partial_\mu$ となるが、ベクトル場に対してはそうはならないのである。次に発散の項を見てみよう。

$$\nabla_\nu A^\nu \simeq \eta^{\nu\rho}\partial_\nu A_\rho \tag{6}$$

$$\nabla^\mu\nabla_\nu A^\nu \simeq \eta^{\nu\rho}\partial^\mu(\partial_\nu A_\rho) - \eta^{\nu\rho}(\partial^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\rho})A_\lambda \tag{7}$$

これらに含まれる Christoffel 記号の項が Ricci テンソルの項

$$R^\mu_\nu A^\nu \simeq \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}(\partial_\tau\Gamma^\tau_{\rho\nu} - \partial_\rho\Gamma^\tau_{\tau\nu})A_\lambda$$

と相殺するわけである。

5 Lorentz ゲージ

では "Lorentz ゲージ" における式 (3) ではどうなるだろうか。実は Lorentz 条件式 $\nabla^\mu A^{\rm L}_\mu = 0$ は一般には大域的に成立し得ないのである。ある点 P に着目してその点を局所慣性座標で表すと、Lorentz 条件式は (6) より $\eta^{\nu\rho}\partial_\nu A^{\rm L}_\rho = 0$ であるが、一方でその微分も (座標によらず) 大域的にゼロでなければならない。これも (7) を用いて同様に点 P に対して局所慣性座標で表すと $\eta^{\nu\rho}\partial^\mu(\partial_\nu A^{\rm L}_\rho) - \eta^{\nu\rho}(\partial^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\rho})A^{\rm L}_\lambda = 0$ つまり

$$\eta^{\nu\rho}(\partial^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\rho})A^{\rm L}_\lambda = 0 \tag{8}$$

を満たさなければならない。点 P は任意なので、"Lorentz 条件式" $\nabla^\mu A^{\rm L}_\mu = 0$ が大域的に成立するためには曲率がゼロでなければならないことを意味するのである。$\cdots$ というのはちょっと言い過ぎで、少なくとも局所慣性座標に移ったとき、(8) 式を満たさなければならない。

ちなみに Wald [1, 71 頁] は Lorentz ゲージで曲率が現れることが言及しているが、それ以上のことは書いていない。内山 [2, 115 頁] も、(3) を導出しただけで何も言及していない。Landau, Lifshitz [3] は初めから普通微分で書いているので、共変 Lorentz ゲージどころか曲率と結合しているかのような式も出てこない。

参考文献

[1] R. M. Wald. *Gereral Relativity*. Univ. Cicago, 1984.

[2] 内山龍雄. **一般相対性理論**. 物理学選書 15. 裳華房, 10 edition, 1992.

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. **場の古典論**. 理論物理学教程. 東京図書, 6 edition, 1994.