時空の3+1分解

tomocci

平成18 年4 月12 日

概 要

重力の正準量子化をする際, 時間と空間をしなければならない. というわけでしてみる. 因みに本稿では捩率をゼロとして議論を進める. また, 計量の符号系に依らないように書き下したので, 時間と空間の分解に限らず適用できる.

1 どのように分解するか

時間と 3 次元空間を分離する方法は一意的ではない. 例えば光線の軌跡から定義される同時刻面を 3 次元空間と定義する方法もある. が, ここでは

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \eta \ , \quad n^\nu \nabla_\nu n^\mu = 0$$

を満たす時間的測地的単位ベクトル n^μ に直交するように 3 次元空間を定義する.

η とこの直ぐ後に導入する ζ の組 (η, ζ) の符号の取り方によって Euclid 計量 $(+,+)$, Lorentz 計量 $(+,-)$ ないし $(-,+)$ のそれぞれに対応させることにする.

3 次元空間への射影子 P_μ^ν は

$$P_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu - \eta n_\mu n^\nu$$

で定義される. 但し $n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu$ である. 射影子という名の通り $P_\mu^\rho P_\rho^\nu = P_\mu^\nu$ を満たす. 例えば時空のベクトル A^μ は

$$^3A^\mu = P_\nu^\mu A^\nu$$

のように 3 次元空間のベクトル $^3A^\mu$ へと射影される.

3 次元計量 $q_{\mu\nu}$ は

$$q_{\mu\nu} = \zeta P_\mu^\alpha P_\nu^\beta g_{\alpha\beta}$$

のように 4 次元計量を射影し, 適当な符号を付けて定義する.

3 次元空間の法ベクトル $n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu$ の共変微分 $K_{\mu\nu} = \zeta \nabla_\mu n_\nu$ は外部曲率と呼ばれる. $K_{\mu\nu}$ は n^μ と直交し, かつ対称テンソルとなる. 対称となる理由は, 詳細は避けるが 3 次元ベクトル $^3A^\mu$, $^3B^\mu$ の交換子 $[^3A, {}^3B]^\mu = {}^3A^\nu \nabla_\nu {}^3B^\mu - {}^3B^\nu \nabla_\nu {}^3A^\mu$ もまた n^μ と直交することによる.

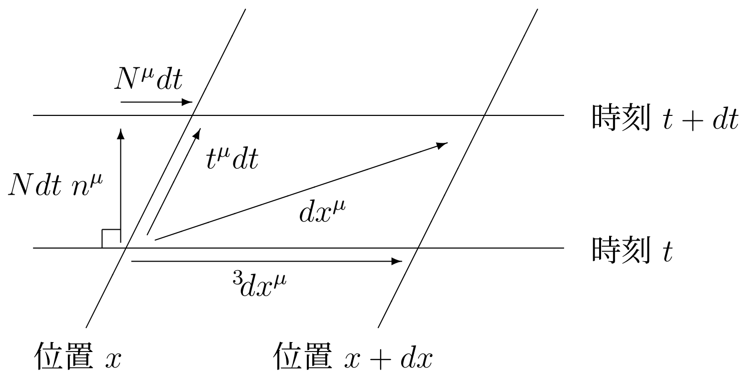

図 1: 時間と空間の分解.

時間方向は n^μ と平行とは限らないので, 時間ベクトル t^μ を

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$$

のように導入する (図 1). N は時間経過関数 (lapse function), N^μ は偏移ベクトル (shift vector) と呼ばれる. N^μ は空間的ベクトル ($g_{\mu\nu}n^\mu N^\nu = 0$) である. 図 1 のようにベクトルの和から $dx^\mu = t^\mu dt + {}^3dx^\mu = Nn^\mu dt + ({}^3dx^\mu + N^\mu dt)$ となり

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}\{Nn^\mu dt + ({}^3dx^\mu + N^\mu dt)\}\{Nn^\nu dt + ({}^3dx^\nu + N^\nu dt)\} \\ &= \eta N^2 dt^2 + \zeta q_{\mu\nu}({}^3dx^\mu + N^\mu dt)({}^3dx^\nu + N^\nu dt) \\ &= (\eta N^2 + \zeta q_{\mu\nu}N^\mu N^\nu)dt^2 + 2\zeta q_{\mu\nu}N^\mu {}^3dx^\nu dt + \zeta q_{\mu\nu}{}^3dx^\mu {}^3dx^\nu \end{aligned}$$

と表すことが出来る.

2 添字の上げ下げ

例えば外部曲率 $K_{\mu\nu}$ を, $g^{\mu\nu}$ で添字を上げるときと $q^{\mu\nu}$ で上げるときでは, $g^{\mu\nu}K_{\nu\rho} = \zeta q^{\mu\nu}K_{\nu\rho}$ のように符号 ζ だけ異なってしまう. 混乱を避けるため, 本稿では添字の上げ下げを極力行わないようにする.

3　時間と空間の成分表示

時間ベクトルを $t^\mu = (1, 0)$, 空間的ベクトルを ${}^3A^\mu = (0, A^a)$ となるように成分表示しよう．すると計量は ($N_a = q_{ab}N^b$ として)

$$ds^2 = (\eta N^2 + \zeta N_a N^a)dt^2 + 2\zeta N_a dx^a dt + \zeta q_{ab} dx^a dx^b$$

これを成分で表すと

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta N^2 + \zeta N_a N^a & \zeta N_a \\ \zeta N_a & \zeta q_{ab} \end{pmatrix} \;,\quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta \frac{1}{N^2} & -\eta \frac{N^a}{N^2} \\ -\eta \frac{N^a}{N^2} & \zeta q^{ab} + \eta \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix}$$

のようになる．但し q^{ab} は q_{ab} の逆である．

3 次元計量は

$$q_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_a N^a & N_a \\ N_a & q_{ab} \end{pmatrix} \;,\quad q^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^{ab} \end{pmatrix}$$

4 次元量としての $q^{\mu\nu}$ は $q_{\mu\nu}$ の逆ではないことに注意しよう．

体積要素は逆行列の定義

$$g^{00} = \frac{(-1)^{1+1}}{\det g_{\mu\nu}} \text{ cofactor-det } g_{00}$$

より

$$\sqrt{\eta\zeta g} = N\sqrt{q}$$

となる．

4　3次元共変微分

次に3次元共変微分を定義する.

$$^3\nabla_\mu A_\nu = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \nabla_\alpha A_\beta$$

つまり4次元の共変微分を施した後に3次元に射影する. このとき, $^3\nabla$ に対して3次元計量 $q_{\mu\nu}$ は定数並み $^3\nabla_\rho q_{\mu\nu} = 0$ となる. また, Leibnitz 則は

$$^3\nabla_\mu (A_\nu B_\rho) = (^3\nabla_\mu A_\nu)^3 B_\rho + {}^3A_\nu (^3\nabla_\mu B_\rho)$$

となる.

ベクトルの共変微分を3次元量で記述しよう. $\delta_\mu^\nu = P_\mu^\nu + \eta n_\mu n^\nu$ などを要所に挟んで

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu A_\nu &= \nabla_\mu ({}^3A_\nu + \eta n_\nu A_n) \\
&= (P_\mu^\alpha + \eta n_\mu n^\alpha)(P_\nu^\beta + \eta n_\nu n^\beta)\nabla_\alpha {}^3A_\beta + \eta \nabla_\mu (n_\nu A_n) \\
&= {}^3\nabla_\mu {}^3A_\nu + \eta n_\mu \nabla_n {}^3A_\nu - \eta q^{\rho\sigma} K_{\mu\sigma} n_\nu {}^3A_\rho \\
&\quad + \eta\zeta K_{\mu\nu} A_n + \eta n_\nu ({}^3\nabla_\mu + \eta n_\mu \nabla_n) A_n
\end{aligned}$$

ここで $n^\mu A_\mu = A_n,\ \nabla_n = n^\mu \nabla_\mu$ などである.

5　時間微分

時間微分は, Lie 微分と呼ばれるもので定義される. これも詳細は避けるが, ベクトル X^μ に沿った Lie 微分は, スカラー ϕ 及びベクトル A^μ に対して

$$\mathfrak{L}_X \phi = X^\mu \nabla_\mu \phi\ , \quad \mathfrak{L}_X A^\mu = X^\nu \nabla_\nu A^\mu - A^\nu \nabla_\nu X^\mu$$

となるように定義されている. これを用いて時間微分を t^μ に沿った Lie 微分を空間へ射影したものとして定義しよう. すると3次元計量の時間微分は

$$\begin{aligned}
\dot{q}_{\mu\nu} &= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta \mathfrak{L}_t q_{\alpha\beta} \\
&= P_\mu^\alpha P_\nu^\beta t^\rho \nabla_\rho q_{\alpha\beta} + 2P_\mu^\alpha P_\nu^\beta q_{\rho(\alpha}\nabla_{\beta)} t^\rho \\
&= \zeta P_\mu^\alpha P_\nu^\beta t^\rho \nabla_\rho (g_{\alpha\beta} - \eta n_\alpha n_\beta) \\
&\quad + 2P_\mu^\alpha P_\nu^\beta q_{\rho(\alpha}\nabla_{\beta)}(N n^\rho + N^\rho) \\
&= 2\zeta N P_\mu^\alpha P_\nu^\beta g^{\rho\sigma} q_{\rho(\alpha} K_{\beta)\sigma} + 2P_\mu^\alpha P_\nu^\beta q_{\rho(\alpha}\nabla_{\beta)} N^\rho \\
&= 2N K_{\mu\nu} + 2{}^3\nabla_{(\mu} N_{\nu)}
\end{aligned}$$

丸括弧で挟まれた添字は対称化を表す. こうして外部曲率を

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}(\dot{q}_{\mu\nu} - 2{}^3\nabla_{(\mu} N_{\nu)})$$

のように書き下すことが出来る.

6　作用の分解

重力場の作用汎関数 S_{grav} は

$$
\begin{aligned}
S_{grav} &= -\frac{\eta}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\ \sqrt{\eta\zeta g}\ R \\
&= -\frac{\eta}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\ \sqrt{\eta\zeta g}\ (P^{\sigma\nu}P^\mu_\rho R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} + 2\eta n^\sigma n^\mu R^\rho{}_{\sigma\rho\mu})
\end{aligned}
$$

であるが, これらを 3 次元量で表そう. まず第 1 項目は 4 次元 Riemann 曲率テンソルを全て 3 次元に射影すれば得られる.

$$
\begin{aligned}
P^\alpha_\mu P^\beta_\nu P^\rho_\gamma R^\gamma{}_{\sigma\alpha\beta}{}^3A^\sigma &= P^\alpha_\mu P^\beta_\nu P^\rho_\gamma[\nabla_\alpha,\nabla_\beta]^3A^\gamma \\
&= 2P^\alpha_{[\mu}P^\beta_{\nu]}P^\rho_\gamma\nabla_\alpha\nabla_\beta{}^3A^\gamma \\
&= 2P^\alpha_{[\mu}P^\beta_{\nu]}P^\rho_\gamma\nabla_\alpha({}^3\nabla_\beta{}^3A^\gamma + \eta n_\beta\nabla_n{}^3A^\gamma - \eta\zeta n^\gamma K_{\beta\sigma}{}^3A^\sigma) \\
&= ({}^3R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} - 2\eta\zeta q^{\rho\lambda}K_{\lambda[\mu}K_{\nu]\sigma})^3A^\sigma \\
P^{\sigma\nu}P^\mu_\rho R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} &= \zeta q^{\sigma\nu}P^{\mu}_\rho{}^3R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} - 2\eta q^{\sigma\nu}P^\mu_\rho q^{\rho\lambda}K_{\lambda[\mu}K_{\nu]\sigma} \\
&= \zeta{}^3R - 2\eta K^\mu_{[\mu}K^\nu_{\nu]}
\end{aligned}
$$

3 次元量の添字の上げ下げは $q^{\mu\nu}$ で行った. また, 角括弧で挟まれた添字は反対称化を表す. 第 2 項目は

$$
\begin{aligned}
2\eta n^\sigma n^\mu R^\rho{}_{\sigma\rho\mu} &= 2\eta n^\mu[\nabla_\rho,\nabla_\mu]n^\rho \\
&= 4\eta\zeta n^\mu g^{\rho\sigma}\nabla_{[\rho}K_{\mu]\sigma} \\
&= -\nabla_\mu(2\eta n^\mu K) + 4\eta K^\mu_{[\mu}K^\nu_{\nu]}
\end{aligned}
$$

但し $K = K^\mu_\mu$ である. よって

$$
S_{grav} = -\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\ N\sqrt{q}(\eta\zeta^3R + 2K^\mu_{[\mu}K^\nu_{\nu]}) + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Omega} d^3x\ N\sqrt{q}K
$$

が得られる. 第 2 項目は 4 次元の全微分項に由来し, 作用積分を高々1 階の時間微分で押さえるのであれば元々この項を引いておいて

$$
\begin{aligned}
S_{grav} &= -\frac{\eta}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\ \sqrt{\eta\zeta g}R - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Omega} d^3x\ N\sqrt{q}K \\
&= -\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\ N\sqrt{q}(\eta\zeta^3R + 2K^\mu_{[\mu}K^\nu_{\nu]})
\end{aligned}
$$

とすればよい.