Lorentz 変換の導出

tomocci

平成 19 年 1 月 29 日

概 要

光速度不変の原理を基に, 時間の遅れ, 長さの縮み, 同時刻の相対性を導き, それらから Lorentz 変換の公式を導く.

1 諸定義

静止系 ... とある慣性系.
運動物体 ... 静止系に対して速度 V で等速直線運動をしている物体.
運動系 ... 運動物体を原点にとった慣性系.

2　時間の遅れ

運動物体に, 運動方向と垂直に光線を往復させる. 幅を L としたとき, 運動系における往復時間 t' は

$$t' = \frac{2L}{c}$$

である. 一方, 静止系においては図より

$$\left(c \times \frac{t}{2}\right)^2 = L^2 + \left(V \times \frac{t}{2}\right)^2$$

よって

$$t = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

つまり

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

大小関係は

$$t \geqq t'$$

つまり運動系で「1 秒間で立ち上がる」現象を静止系ではそれ以上の時間を掛けていることになる.

3　長さの縮み

運動物体の長さを, 光線を運動方向に沿って往復させて距離を測るとする. まず運動系において, 運動物体の長さ L_0 は往復時間を t' とすると

$$L_0 = \frac{ct'}{2}$$

一方この測定を静止系で見てみよう. 対応する運動物体の長さを L, 往路の経過時間を t_1 として

$$ct_1 = L + Vt_1 \ \rightarrow \ t_1 = \frac{L}{c - V}$$

同様に復路の経過時間を t_2 とすれば

$$ct_2 = L - Vt_2 \ \rightarrow \ t_2 = \frac{L}{c + V}$$

往復時間 $t = t_1 + t_2$ は

$$t = \frac{2cL}{c^2 - V^2}$$

よって

$$L = \frac{ct}{2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ t$ より

$$L = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ L_0$$

L_0 は物体が静止しているときの長さである. $L \leqq L_0$ なので, 運動物体は長さが縮むことが分かる.

4　同時刻の相対性

運動物体に原点から (静止系における長さ) $-L,\ L$ の所に測定器を設け, 運動系の原点から光線を放つ. ここで $L = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,L_0$ であり, よって運動系においては $-L_0,\ L_0$ の位置である.

運動系においては, 前後共に光線が同時に計測され, その経過時間は共に

$$\frac{L_0}{c}$$

である.

一方, 静止系においては, 後方が先に計測し, その後前方が計測する. 経過時間はそれぞれ

$$\frac{L}{c+V},\ \frac{L}{c-V}$$

また, 計測する位置はそれぞれ

$$-\frac{cL}{c+V},\ \frac{cL}{c-V}$$

となる. これは, 運動系における同時刻が, 静止系においては, t-x グラフで

$$\frac{\frac{L}{c-V}-\frac{L}{c+V}}{\frac{cL}{c-V}-\left(-\frac{cL}{c+V}\right)}=\frac{V}{c^2}$$

という傾きを持っていることを意味する. 上の場合, 具体的には

$$t=\frac{V}{c^2}x+\frac{L}{c}$$

が運動系の同時刻線である.

5 Lorentz 変換

静止系における座標を $x,\ t$, 運動系における座標を $x',\ t'$ と表す.
$t'=0$ における座標 $(x',\ 0)$ は静止系においては

$$(x,\ t)=\left(x,\frac{V}{c^2}x\right)$$

ここで x は位置 $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,x'$ から速度 V で時間 $\frac{V}{c^2}x$ だけ移動したことから

$$x=\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\,x'+V\times\frac{V}{c^2}x\ \rightarrow\ x=\frac{x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

よって運動系における座標 $(x',\ 0)$ は

$$(x,\ t)=\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\frac{\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

運動系の原点 $(0,\ t')$ は静止系では

$$(x,\ t)=\left(\frac{Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\frac{t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

以上を合わせれば, 運動系の座標 $(x',\ t')$ は

$$(x,\ t)=\left(\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)$$

こうして Lorentz 変換

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ t &= \frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

を得る.